

DESARROLLO DEL MODELO DINÁMICO DE UN BRAZO ARTICULADO DE SEIS GRADOS DE LIBERTAD CON COMPROBACIÓN EN SIMSCAPE.

González-Rodríguez Andrés, Baray-Arana Rogelio E.
Tecnológico Nacional de México / Instituto Tecnológico de Chihuahua
División de Estudios de Posgrado e Investigación
Laboratorio de Control de Electromecanismos
Av. Tecnológico 2909, Chihuahua, Chih. 31200
Tel. 614 201 2000 ext 2112
agonzalezr@itch.edu.mx; rbaray@itch.edu.mx

RESUMEN.

Este artículo presenta el desarrollo del modelo dinámico de un brazo articulado de seis grados de libertad (GDL) usando el método de Euler-Lagrange, el cual se encuentra en el laboratorio de control de electromecanismos (LabCEM) en el Instituto Tecnológico de Chihuahua. Se realizará una simulación en SIMULINK del modelo y posteriormente se comprobará cada grado de libertad usando SIMSCAPE.

Palabras Clave: brazo articulado, SIMSCAPE, modelo dinámico.

ABSTRACT.

This paper presents the development of the dynamic model of an articulated arm of six degrees of freedom (DOF) using the Euler-Lagrange method, which is found in the electromechanism control Laboratory (LabCEM) at the Technological Institute of Chihuahua. Simulations of the model will be performed by the use of SIMULINK and later will be prove using SMISCAPE.

Keywords: articulated arm, SIMSCAPE, dynamic model.

1. INTRODUCCIÓN

El uso de brazo articulados es de gran importancia ya que se encuentran en varias áreas de interés como lo es el área académica, en la industria, en el área médica, de exploración espacial, entre otras.

Para poder lograr todas las tareas que se le exigen a un brazo articulado, como lo es el posicionamiento de objetos, soldadura, aplicación de pintura, ensamblaje de partes, etc. es necesario del uso de una ley de control, pero para poder aplicar dicha ley de control es necesario conocer el modelo dinámico del manipulador.

Para la obtención del modelo dinámico existen dos métodos comúnmente usados, esto es el método de Newton-Euler el cual es usado en [1] para el desarrollo de la dinámica de un manipulador tipo *Standford* y el método de Euler-Lagrange utilizado en [2] el cual además hace el método de Newton-Euler y los compara.

La diferencia que radica entre estos dos métodos es que el método de Newton-Euler se basa en la obtención del modelo usando sumatoria de fuerzas o torques vectoriales, en cambio el método de Euler-Lagrange se basa en la energía cinética y potencial del sistema mecánico. [3]

Un control común aplicado a brazos articulados es el de la linealización por retroalimentación o también llamado dinámica inversa, el cual linealiza el control usando el modelo dinámico del robot, de esta manera es posible aplicar controles lineales, este tipo de control se puede ver en [4], donde se hace uso de la dinámica inversa para linealizar el sistema y luego usar el control PID para la convergencia del sistema.

Otro control usado es el control por modos deslizantes el cual al hacer un control discontinuo perjudica los actuadores del sistema mecánico, para reducir los cambios drásticos proporcionado por la ganancia del control se le agrega la dinámica inversa para reducir la ganancia discontinua, este tipo de control es usado [5] usando un control de primer orden de modo deslizante y en [6] un control por modos deslizantes de segundo orden.

Se observa en la literatura como el uso del modelo dinámico es sumamente importante para tener conocimiento del comportamiento del brazo articulado y para el uso del mismo modelo en diferentes leyes de control para tener un mejor desempeño, para esto es importante el uso de software que nos ayude a validar el modelo dinámico desarrollado.

En este artículo se presenta el desarrollo del modelo dinámico de un brazo articulado de seis grados de libertad que se encuentra en el laboratorio de electromecanismos en el Tecnológico de Chihuahua usando el método de Euler-Lagrange, simulando dicho modelo en SIMULINK y usando SIMSCAPE para la validez del mismo.

2. DESARROLLO DEL MODELO DINÁMICO

2.1 Modelado dinámico.

Para la obtención del modelo dinámico, se usó el método de Euler-Lagrange, el cual consiste en una función L llamada Langraniano la cual está en función de la energía cinética y potencial del sistema mecánico, en este caso el brazo articulado.

Teniendo el Langraniano la ecuación dinámica se calcula usando la ecuación 1.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \right) = \tau_k \quad (1)$$

Siendo \dot{q}_k y q_k la velocidad y posición respectivamente de cada uno de los grados de libertad y τ_k el par desarrollado en cada grado de libertad.

De tal manera que el modelo dinámico del robot queda expresado en la ecuación 2

$$D(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (2)$$

La ecuación 2 contiene la matriz de inercia $D(\mathbf{q})$, la matriz centrífuga y de Coriolis, el vector de gravedad $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ y el vector de pares $\boldsymbol{\tau}$, así como la posición \mathbf{q} , la velocidad $\dot{\mathbf{q}}$, y la aceleración $\ddot{\mathbf{q}}$ de cada uno de los grados de libertad expresada en forma vectorial. Cada uno de estos términos se define de la siguiente manera

$$D(\mathbf{q}), C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ y } \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \mathbf{g}(\mathbf{q}), \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$$

y en forma matricial la ecuación 2 se expresa de esta manera

$$\begin{bmatrix} d_{11}(\vec{\mathbf{q}}(t)) & d_{12}(\vec{\mathbf{q}}(t)) & \dots & d_{1n}(\vec{\mathbf{q}}(t)) \\ d_{21}(\vec{\mathbf{q}}(t)) & d_{22}(\vec{\mathbf{q}}(t)) & \dots & d_{2n}(\vec{\mathbf{q}}(t)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1}(\vec{\mathbf{q}}(t)) & d_{n2}(\vec{\mathbf{q}}(t)) & \dots & d_{nn}(\vec{\mathbf{q}}(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) \\ \vdots \\ \ddot{q}_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11}(\vec{\mathbf{q}}(t), \dot{\vec{\mathbf{q}}}(t)) & c_{12}(\vec{\mathbf{q}}(t), \dot{\vec{\mathbf{q}}}(t)) & \dots & c_{1n}(\vec{\mathbf{q}}(t), \dot{\vec{\mathbf{q}}}(t)) \\ c_{21}(\vec{\mathbf{q}}(t), \dot{\vec{\mathbf{q}}}(t)) & c_{22}(\vec{\mathbf{q}}(t), \dot{\vec{\mathbf{q}}}(t)) & \dots & c_{2n}(\vec{\mathbf{q}}(t), \dot{\vec{\mathbf{q}}}(t)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}(\vec{\mathbf{q}}(t), \dot{\vec{\mathbf{q}}}(t)) & c_{n2}(\vec{\mathbf{q}}(t), \dot{\vec{\mathbf{q}}}(t)) & \dots & c_{nn}(\vec{\mathbf{q}}(t), \dot{\vec{\mathbf{q}}}(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{q}_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varphi_1(\vec{\mathbf{q}}(t)) \\ \varphi_2(\vec{\mathbf{q}}(t)) \\ \vdots \\ \varphi_n(\vec{\mathbf{q}}(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1(t) \\ \tau_2(t) \\ \vdots \\ \tau_n(t) \end{bmatrix}$$

Teniendo la ecuación 2 se procede a definir cada término.

La matriz de inercia se define en la ecuación 3

$$D(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^n [m_i J_{vci}^T(\mathbf{q}) J_{vci}(\mathbf{q}) + J_{\omega_i}(\mathbf{q}) R_i(\mathbf{q}) I_i R_i^T(\mathbf{q}) J_{\omega_i}(\mathbf{q})]$$

$$D(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^n [D_i] \quad (3)$$

$J_{vci}(\mathbf{q})$ y $J_{\omega_i}(\mathbf{q})$ son las matrices jacobianas del centro de masa de velocidad lineal y velocidad angular, $R_i(\mathbf{q})$ es la matriz de rotación, m_i es la masa e I_i es el tensor de inercia del eslabón i .

La matriz centrífuga y de coriolis está dada por la ecuación 4 y 5.

$$C_{kj}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{i=1}^n C_{ijk}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \quad (4)$$

$$C_{ijk} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial d_{kj}(\mathbf{q})}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}(\mathbf{q})}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_k} \right)$$

(5)

El vector de gravedad se expresa en la ecuación 6 de la siguiente manera

$$V(\mathbf{q}) = V_1(\mathbf{q}) + V_2(\mathbf{q}) + \dots + V_n(\mathbf{q})$$

$$\varphi_1(\mathbf{q}) = \frac{\partial V(\mathbf{q})}{\partial q_1}$$

$$\varphi_2(\mathbf{q}) = \frac{\partial V(\mathbf{q})}{\partial q_2}$$

$$\varphi_n(\mathbf{q}) = \frac{\partial V(\mathbf{q})}{\partial q_n}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \varphi_1(\mathbf{q}) \\ \varphi_2(\mathbf{q}) \\ \vdots \\ \varphi_n(\mathbf{q}) \end{bmatrix}$$

(6)

donde $V(\mathbf{q})$ es la suma de las energías potenciales tomadas en el centro de masa de cada eslabón.

2.2 Obtención del modelo dinámico del brazo articulado.

El brazo articulado que consta de 6 grados de libertad se puede ver en la figura 1.

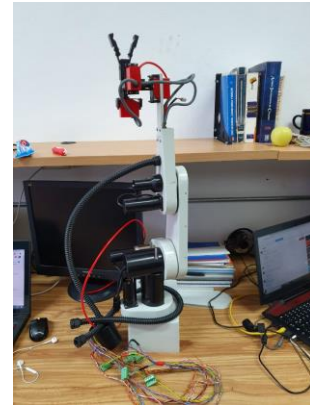


Fig. 1. Brazo articulado de 6 grados de libertad.

Para obtener el modelo dinámico total es necesario el uso de las ecuaciones 3, 4, 5 y 6, por lo que se empezará obteniendo la matriz de inercia.

La matriz de inercia depende de las matrices jacobianas de velocidad lineal y angular y de la matriz de rotación del centro

de masa de cada eslabón, esto es posible de obtener mediante el uso de la cinemática directa con el método de Denavit Hartenberg (DH) de cada centro de masa del eslabón, para hacer esto se hace un diagrama alambre cortando en el eslabón que se desea, y de ahí obtener la cinemática directa para la obtención de las matrices jacobianas y de rotación.

El diagrama alambre del manipulador puede verse en la figura 2.

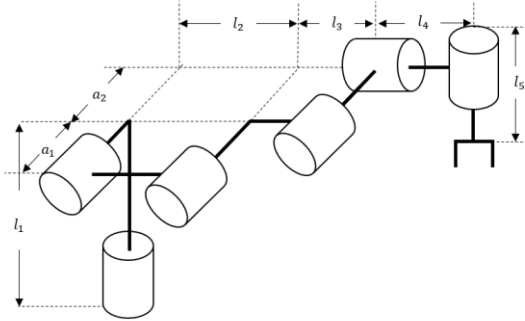


Fig. 2. Diagrama alambre del brazo articulado.

Las distancias del brazo articulado son

$$l_1 = 26 \text{ cm}$$

$$a_1 = 6 \text{ cm}$$

$$l_2 = 23 \text{ cm}$$

$$l_3 = 24 \text{ cm}$$

$$a_2 = 10 \text{ cm}$$

$$l_4 = 4 \text{ cm}$$

$$l_5 = 10 \text{ cm}$$

2.2.1 Obtención de la dinámica de la primera articulación.

Se desarrolla el diagrama de alambre del eslabón uno y se obtiene la cinemática directa esto se puede ver en la figura 3 y tabla 1.

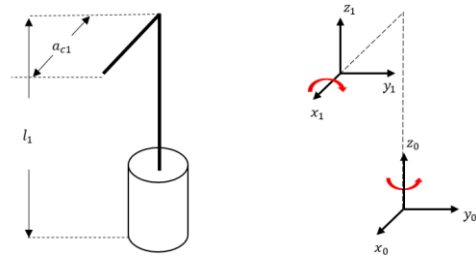


Fig. 3. Diagrama alambre del eslabón de la primera articulación.

Tabla.1 Parámetros DH del eslabón de la primera articulación.

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	l_1	a_{c1}	0°

Siendo en la tabla 1 $q_k = \theta_k$.

Ya que se tiene los parámetros DH se obtiene la matriz de transformación.

$$A_0^1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & 0 & 0 & a_{c1} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 & 0 & 0 & a_{c1} \sin \theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Con esto se procedió a usar la matriz Jacobiana para obtener las velocidades del centro de masa.

El brazo articulado cuenta con seis grados de libertad rotatorios por lo que en la matriz Jacobiana se usaron las ecuaciones de desplazamientos angulares.

La jacobiana de velocidad angular y lineal es

$$J_{\omega 1} = \mathbf{z}_0 = [0 \ 0 \ 1]^T$$

$$J_{v1} = \mathbf{z}_i \times (\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{i-1}) = \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{p}_0^1)$$

$$\mathbf{p}_0^1 = A_0^1(1:3, 4) = \begin{bmatrix} a_{c1} \cos \theta_1 \\ a_{c1} \sin \theta_1 \\ l_1 \end{bmatrix}$$

$$J_{v1} = \begin{bmatrix} -a_{c1} \sin \theta_1 \\ a_{c1} \cos \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para poder obtener la energía cinética de rotación es necesario la orientación, esto debido a que tiene que estar referenciado en el eje de la matriz de inercia por lo que

$$R_0^1 = A_0^1(3:3, 3:3) = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El tensor de inercia se define como:

$$I_1 = \begin{bmatrix} I_{xx1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{bmatrix}$$

Usando la ecuación 3 se tiene

$$D_1 = d_{11,1} = I_{zz1} + m_1 a_{c1}^2$$

Debido a que D_1 no depende de ningun grado de libertad la ecuación 5 es cero, por lo tanto la ecuación 6 también es cero.

2.2.2 Obtención de la dinámica de la segunda articulación.

Se desarrolla el diagrama de alambre del eslabón dos y se obtiene la cinemática directa esto se puede ver en la figura 4 y tabla 2.

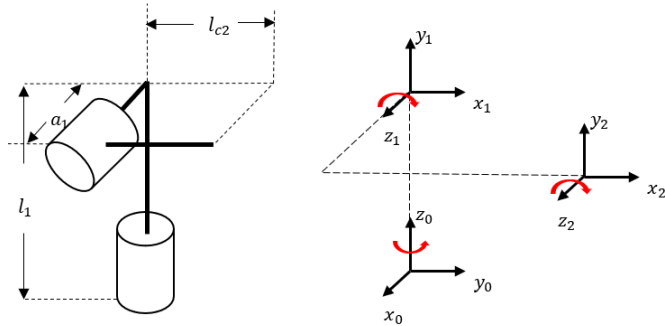


Fig. 4. Diagrama alambre del eslabón de la segunda articulación.

Tabla 2. Parámetros DH del eslabón de la segunda articulación.

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	$\theta_1 + 90^\circ$	l_1	0	90°
2	θ_2	a_1	l_{c2}	0°

Se obtienen las matrices de transformación.

$$A_0^1 = \begin{bmatrix} -\sin \theta_1 & 0 & \cos \theta_1 & 0 \\ \cos \theta_1 & 0 & \sin \theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_0^2 = \begin{bmatrix} -\cos \theta_2 \sin \theta_1 & \sin \theta_2 \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & a_1 \cos \theta_1 - l_{c3} \cos \theta_2 \sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \cos \theta_2 & \cos \theta_2 \sin \theta_1 & \sin \theta_1 & a_1 \sin \theta_1 + l_{c3} \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & l_1 + l_{c3} \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se obtiene la matriz jacobina de velocidad angular y velocidad lineal.

$$z_0 = [0 \ 0 \ 1]^T$$

$$z_0^1 = A_0^1(1:3, 3) = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{\omega 2} = \begin{bmatrix} 0 & \cos \theta_1 \\ 0 & \sin \theta_1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p_0^2 = A_0^2(1:3, 4) = \begin{bmatrix} a_1 \cos \theta_1 - l_{c2} \cos \theta_2 \sin \theta_1 \\ a_1 \sin \theta_1 + l_{c2} \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\ l_1 + l_{c2} \sin \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$p_1^2 = A_0^2(1:3, 4) - A_0^1(1:3, 4)$$

$$p_1^2 = \begin{bmatrix} a_1 \cos \theta_1 - l_{c2} \cos \theta_2 \sin \theta_1 \\ a_1 \sin \theta_1 + l_{c2} \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\ l_{c2} \sin \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$J_{v2} = [z_0 \times p_0^2 \quad z_0^1 \times p_1^2]$$

$$J_{v2} = \begin{bmatrix} -a_1 \sin \theta_1 - l_{c2} \cos \theta_1 \cos \theta_2 & l_{c2} \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ a_1 \cos \theta_1 - l_{c2} \cos \theta_2 \sin \theta_1 & -l_{c2} \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\ 0 & l_{c2} \cos \theta_2 \end{bmatrix}$$

El tensor de inercia y la matriz de rotación están dados por.

$$I_2 = \begin{bmatrix} I_{xx2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz2} \end{bmatrix}$$

$$R_0^2 = A_0^2(3:3, 3:3) = \begin{bmatrix} -\cos \theta_2 \sin \theta_1 & \sin \theta_2 \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \\ \cos \theta_1 \cos \theta_2 & \cos \theta_2 \sin \theta_1 & \sin \theta_1 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \end{bmatrix}$$

después se obtiene la matriz de inercia con la ecuación 3

$$D_2 = \begin{bmatrix} d_{11,2} & d_{12,2} \\ d_{21,2} & d_{22,2} \end{bmatrix}$$

$$d_{11,2} = m_2(a_1^2 - l_{c3}^2 \sin^2 \theta_2 + l_{c3}^2) + I_{xx2} \sin^2 \theta_2 + I_{yy2} \cos^2 \theta_2$$

$$d_{12,2} = -a_1 l_{c3} m_2 \sin \theta_2$$

$$d_{21,2} = -a_1 l_{c3} m_2 \sin \theta_2$$

$$d_{22,2} = m_2 l_{c3}^2 + I_{zz2}$$

Teniendo la matriz de inercia se usa la ecuación 4 y 5 para obtener la matriz de Coriolis y centrífuga.

$$C_2 = \begin{bmatrix} c_{11,2} & c_{12,2} \\ c_{21,2} & c_{22,2} \end{bmatrix}$$

$$c_{111,2} = 0$$

$$c_{211,2} = (I_{xx2} - I_{yy2} - m_2 l_{c2}^2) \cos \theta_2 \sin \theta_2$$

$$c_{11,2} = C_{211,2} \dot{q}_2$$

$$c_{121,2} = (I_{xx2} - I_{yy2} - m_2 l_{c2}^2) \cos \theta_2 \sin \theta_2$$

$$c_{221,2} = -a_1 l_{c2} m_2 \cos \theta_2$$

$$c_{12,2} = C_{121,2} \dot{q}_1 + C_{221,2} \dot{q}_2$$

$$c_{112,2} = (-I_{xx2} + I_{yy2} + m_2 l_{c2}^2) \cos \theta_2 \sin \theta_2$$

$$c_{212,2} = 0$$

$$c_{21,2} = C_{112,2} \dot{q}_1$$

$$c_{122,2} = 0$$

$$c_{222,2} = 0$$

$$c_{22,2} = 0$$

2.2.3 Obtención de la dinámica de la tercera articulación.

En la figura 2 se observa que para obtener el tercer centro de masa existen dos eslabones. Para esto se realizar la obtención de la dinámica de ambas salientes para obtener la dinámica total de esa sección del brazo articulado, el primer diagrama alambre se puede ver en la figura 5.

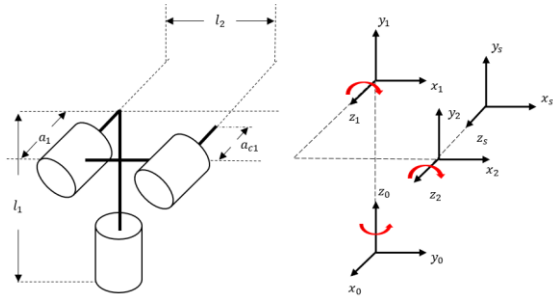


Fig. 5. Diagrama alambre del primer eslabón de la tercera articulación.

En la tabla 3 se observan los parámetros del método DH.

Tabla 3. Parámetros DH del primer eslabón de la tercera articulación.

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	$\theta_1 + 90^\circ$	l_1	0	90°

2	θ_2	a_1	l_2	0°
s	θ_3	$-a_{c1}$	0	0°

Debido al aumento de términos las ecuaciones se dejarán expresadas. Esto es

$$z_0 = [0 \ 0 \ 1]^T$$

$$z_0^1 = A_0^1(1:3,3)$$

$$z_0^2 = A_0^2(1:3,3)$$

La matriz jacobiana de velocidad lineal y angular quedan la siguiente manera

$$J_{\omega s} = [z_0 \ z_0^1 \ z_0^2]$$

$$J_{v s1} = [z_0 \times p_0^s \ z_0^1 \times p_1^s \ z_0^2 \times p_2^s]$$

El tensor de inercia y la matriz de rotación están dados por

$$I_{s1} = \begin{bmatrix} I_{xxs} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yys} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zzs} \end{bmatrix}$$

$$R_0^s = A_0^{s1}(3:3,3:3)$$

Se usa la ecuación 3 ya que se tienen todos los términos y queda la matriz de inercia de la forma

$$D_{s1} = \begin{bmatrix} d_{11,s} & d_{12,s} & d_{13,s} \\ d_{21,s} & d_{22,s} & d_{23,s} \\ d_{31,s} & d_{32,s} & d_{33,s} \end{bmatrix}$$

Después se procedió a obtener la matriz de inercia del segundo eslabón de la tercera articulación, el diagrama de alambre se puede ver en la figura 6 y los parámetros DH en la tabla 4.

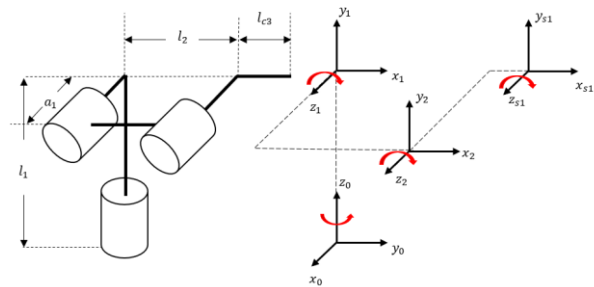


Fig. 6. Diagrama alambre del segundo eslabón de la tercera articulación.

Tabla 4. Parámetros DH del segundo eslabón de la tercera articulación.

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	$\theta_1 + 90^\circ$	l_1	0	90°
2	θ_2	a_1	l_2	0°
s1	θ_3	$-a_1$	l_{c3}	0°

Las matrices jacobianas de velocidad lineal y angular son

$$\mathbf{z}_0 = [0 \ 0 \ 1]^T$$

$$\mathbf{z}_0^1 = A_0^1(1:3, 3)$$

$$\mathbf{z}_0^2 = A_0^2(1:3, 3)$$

La matriz jacobiana de velocidad lineal y angular quedan la siguiente manera

$$J_{\omega s} = [\mathbf{z}_0 \ \mathbf{z}_0^1 \ \mathbf{z}_0^2]$$

$$J_{v s1} = [\mathbf{z}_0 \times \mathbf{p}_0^{s1} \ \mathbf{z}_0^1 \times \mathbf{p}_1^{s1} \ \mathbf{z}_0^2 \times \mathbf{p}_2^{s1}]$$

El tensor de inercia y la matriz de rotación están dados por

$$I_{s1} = \begin{bmatrix} I_{xxs1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yys1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zzs1} \end{bmatrix}$$

$$R_0^{s1} = A_0^{s1}(3:3, 3:3)$$

Se usa la ecuación 3 ya que se tienen todos los términos y queda la matriz de inercia de la forma

$$D_{s1} = \begin{bmatrix} d_{11,s1} & d_{12,s1} & d_{13,s1} \\ d_{21,s1} & d_{22,s1} & d_{23,s1} \\ d_{31,s1} & d_{32,s1} & d_{33,s1} \end{bmatrix}$$

Ya que se tiene las dos partes de la matriz de inercia se suman esto es

$$D_3 = D_s + D_{s1}$$

La matriz de inercia queda de la siguiente manera

$$D_3 = \begin{bmatrix} d_{11,3} & d_{12,3} & d_{13,3} \\ d_{21,3} & d_{22,3} & d_{23,3} \\ d_{31,3} & d_{32,3} & d_{33,3} \end{bmatrix}$$

Usando las ecuaciones 4 y 5 la matriz de Coriolis y centrífuga queda expresada como

$$C_3 = \begin{bmatrix} c_{11,3} & c_{12,3} & c_{13,3} \\ c_{21,3} & c_{22,3} & c_{23,3} \\ c_{31,3} & c_{32,3} & c_{33,3} \end{bmatrix}$$

2.2.4 Obtención de la dinámica de la cuarta articulación.

Se desarrolla el diagrama de alambre del eslabón cuatro y se obtiene la cinemática directa esto se puede ver en la figura 7 y tabla 5.

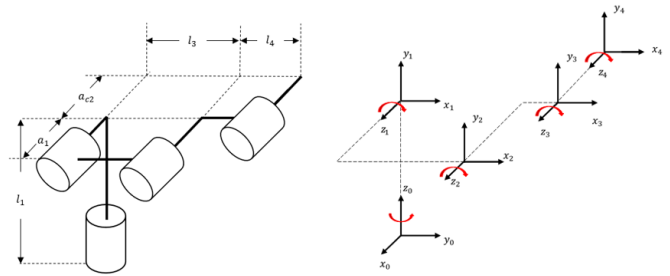


Fig. 7. Diagrama alambre del eslabón de la cuarta articulación.

Tabla 5. Parámetros DH del eslabón de la cuarta articulación.

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	$\theta_1 + 90^\circ$	l_1	0	90°
2	θ_2	a_1	l_2	0°
3	θ_3	$-a_1$	l_3	0°
4	θ_4	$-a_{c2}$	0	0°

Se obtiene la matriz jacobiana de velocidad lineal y angular.

$$\mathbf{z}_0 = [0 \ 0 \ 1]^T$$

$$\mathbf{z}_0^1 = A_0^1(1:3, 3)$$

$$\mathbf{z}_0^2 = A_0^2(1:3, 3)$$

$$\mathbf{z}_0^3 = A_0^3(1:3, 3)$$

$$J_{\omega 4} = [\mathbf{z}_0 \ \mathbf{z}_0^1 \ \mathbf{z}_0^2 \ \mathbf{z}_0^3]$$

$$\mathbf{p}_0^4 = A_0^4(1:3, 4)$$

$$\mathbf{p}_1^4 = A_0^4(1:3, 4) - A_0^1(1:3, 4)$$

$$\mathbf{p}_2^4 = A_0^4(1:3, 4) - A_0^2(1:3, 4)$$

$$\mathbf{p}_3^4 = A_0^4(1:3,4) - A_0^3(1:3,4)$$

$$J_{v4} = [\mathbf{z}_0 \times \mathbf{p}_0^4 \quad \mathbf{z}_0^1 \times \mathbf{p}_1^4 \quad \mathbf{z}_0^2 \times \mathbf{p}_2^4 \quad \mathbf{z}_0^3 \times \mathbf{p}_3^4]$$

El tensor de inercia y la orientación están dados por

$$I_4 = \begin{bmatrix} I_{xx4} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy4} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz4} \end{bmatrix}$$

$$R_0^4 = A_0^4(3:3,3:3)$$

La matriz de inercia y de Coriolis y centrífuga son

$$D_4 = \begin{bmatrix} d_{11,4} & d_{12,4} & d_{13,4} & d_{14,4} \\ d_{21,4} & d_{22,4} & d_{23,4} & d_{24,4} \\ d_{31,4} & d_{32,4} & d_{33,4} & d_{34,4} \\ d_{41,4} & d_{42,4} & d_{44,4} & d_{44,4} \end{bmatrix}$$

$$C_4 = \begin{bmatrix} c_{11,4} & c_{12,4} & c_{13,4} & c_{14,4} \\ c_{21,4} & c_{22,4} & c_{23,4} & c_{24,4} \\ c_{31,4} & c_{32,4} & c_{33,4} & c_{34,4} \\ c_{41,4} & c_{42,4} & c_{44,4} & c_{44,4} \end{bmatrix}$$

2.2.5 Obtención de la dinámica de la quinta articulación.

Se desarrolla el diagrama de alambre del eslabón cinco y se obtiene la cinemática directa esto se puede ver en la figura 8 y tabla 6.

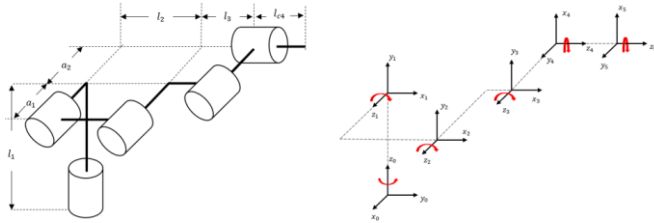


Fig. 8. Diagrama alambre del eslabón de la quinta articulación.

Tabla 6. Parámetros DH del eslabón de la quinta articulación.

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	$\theta_1 + 90^\circ$	l_1	0	90°
2	θ_2	a_1	l_2	0°
3	θ_3	$-a_1$	l_3	0°
4	$\theta_4 + 90^\circ$	$-a_2$	0	90°

5	θ_5	l_{c4}	0°	0°
---	------------	----------	-----------	-----------

Se obtiene la matriz jacobiana de velocidad lineal y angular.

$$\mathbf{z}_0 = [0 \ 0 \ 1]^T$$

$$\mathbf{z}_0^1 = A_0^1(1:3,3)$$

$$\mathbf{z}_0^2 = A_0^2(1:3,3)$$

$$\mathbf{z}_0^3 = A_0^3(1:3,3)$$

$$\mathbf{z}_0^4 = A_0^4(1:3,3)$$

$$J_{\omega 5} = [\mathbf{z}_0 \quad \mathbf{z}_0^1 \quad \mathbf{z}_0^2 \quad \mathbf{z}_0^3 \quad \mathbf{z}_0^4]$$

$$\mathbf{p}_0^5 = A_0^5(1:3,4)$$

$$\mathbf{p}_1^5 = A_0^5(1:3,4) - A_0^1(1:3,4)$$

$$\mathbf{p}_2^5 = A_0^5(1:3,4) - A_0^2(1:3,4)$$

$$\mathbf{p}_3^5 = A_0^5(1:3,4) - A_0^3(1:3,4)$$

$$\mathbf{p}_4^5 = A_0^5(1:3,4) - A_0^4(1:3,4)$$

$$J_{v5} = [\mathbf{z}_0 \times \mathbf{p}_0^5 \quad \mathbf{z}_0^1 \times \mathbf{p}_1^5 \quad \mathbf{z}_0^2 \times \mathbf{p}_2^5 \quad \mathbf{z}_0^3 \times \mathbf{p}_3^5 \quad \mathbf{z}_0^4 \times \mathbf{p}_4^5]$$

El tensor de inercia y la orientación están dados por.

$$I_5 = \begin{bmatrix} I_{xx5} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy5} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz5} \end{bmatrix}$$

$$R_0^5 = A_0^5(3:3,3:3)$$

La matriz de inercia y de Coriolis y centrífuga son.

$$D_5 = \begin{bmatrix} d_{11,5} & d_{12,5} & d_{13,5} & d_{14,5} & d_{15,5} \\ d_{21,5} & d_{22,5} & d_{23,5} & d_{24,5} & d_{25,5} \\ d_{31,5} & d_{32,5} & d_{33,5} & d_{34,5} & d_{35,5} \\ d_{41,5} & d_{42,5} & d_{43,5} & d_{44,5} & d_{45,5} \\ d_{51,5} & d_{52,5} & d_{53,5} & d_{54,5} & d_{55,5} \end{bmatrix}$$

$$C_5 = \begin{bmatrix} c_{11,5} & c_{12,5} & c_{13,5} & c_{14,5} & c_{15,5} \\ c_{21,5} & c_{22,5} & c_{23,5} & c_{24,5} & c_{25,5} \\ c_{31,5} & c_{32,5} & c_{33,5} & c_{34,5} & c_{35,5} \\ c_{41,5} & c_{42,5} & c_{43,5} & c_{44,5} & c_{45,5} \\ c_{51,5} & c_{52,5} & c_{53,5} & c_{54,5} & c_{55,5} \end{bmatrix}$$

2.2.6 Obtención de la dinámica de la sexta articulación.

El diagrama de alambre de la sexta articulación es el de la figura 2, excepto que la distancia l_5 se cambia la distancia del centro de masa de ese eslabón l_{c5} . Los parámetros DH se pueden ver en la tabla 7.

Tabla 7. Parámetros DH del eslabón de la sexta articulación.

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	$\theta_1 + 90^\circ$	l_1	0	90°
2	θ_2	a_1	l_2	0
3	θ_3	$-a_1$	l_3	0
4	$\theta_4 + 90^\circ$	$-a_2$	0	90°
5	$\theta_5 + 90^\circ$	l_4	0	-90°
6	θ_6	l_{c5}	0	0

$$D_6 = \begin{bmatrix} d_{11,6} & d_{12,6} & d_{13,6} & d_{14,6} & d_{15,6} & d_{16,6} \\ d_{21,6} & d_{22,6} & d_{23,6} & d_{24,6} & d_{25,6} & d_{26,6} \\ d_{31,6} & d_{32,6} & d_{33,6} & d_{34,6} & d_{35,6} & d_{36,6} \\ d_{41,6} & d_{42,6} & d_{43,6} & d_{44,6} & d_{45,6} & d_{46,6} \\ d_{51,6} & d_{52,6} & d_{53,6} & d_{54,6} & d_{55,6} & d_{56,6} \\ d_{61,6} & d_{62,6} & d_{63,6} & d_{64,6} & d_{65,6} & d_{66,6} \end{bmatrix}$$

$$C_6 = \begin{bmatrix} c_{11,6} & c_{12,6} & c_{13,6} & c_{14,6} & c_{15,6} & c_{16,6} \\ c_{21,6} & c_{22,6} & c_{23,6} & c_{24,6} & c_{25,6} & c_{26,6} \\ c_{31,6} & c_{32,6} & c_{33,6} & c_{34,6} & c_{35,6} & c_{36,6} \\ c_{41,6} & c_{42,6} & c_{43,6} & c_{44,6} & c_{45,6} & c_{46,6} \\ c_{51,6} & c_{52,6} & c_{53,6} & c_{54,6} & c_{55,6} & c_{56,6} \\ c_{61,6} & c_{62,6} & c_{63,6} & c_{64,6} & c_{65,6} & c_{66,6} \end{bmatrix}$$

Se obtiene la matriz jacobiana de velocidad lineal y angular.

$$\begin{aligned} z_0 &= [0 \ 0 \ 1]^T \\ z_0^1 &= A_0^1(1:3,3) \\ z_0^2 &= A_0^2(1:3,3) \\ z_0^3 &= A_0^3(1:3,3) \\ z_0^4 &= A_0^4(1:3,3) \\ z_0^5 &= A_0^5(1:3,3) \\ J_{\omega 5} &= [z_0 \ z_0^1 \ z_0^2 \ z_0^3 \ z_0^4 \ z_0^5] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_0^6 &= A_0^6(1:3,4) \\ p_1^6 &= A_0^6(1:3,4) - A_0^1(1:3,4) \\ p_2^6 &= A_0^6(1:3,4) - A_0^2(1:3,4) \\ p_3^6 &= A_0^6(1:3,4) - A_0^3(1:3,4) \\ p_4^6 &= A_0^6(1:3,4) - A_0^4(1:3,4) \\ p_5^6 &= A_0^6(1:3,4) - A_0^5(1:3,4) \\ J_{v5} &= [z_0 \times p_0^6 \ z_0^1 \times p_1^6 \ z_0^2 \times p_2^6 \ z_0^3 \times p_3^6 \ z_0^4 \times p_4^6 \ z_0^5 \times p_5^6] \end{aligned}$$

El tensor de inercia y la orientación están dados por.

$$I_6 = \begin{bmatrix} I_{xx6} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy6} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz6} \end{bmatrix}$$

$$R_0^6 = A_0^6(3:3,3:3)$$

La matriz de inercia y de Coriolis y centrífuga son.

2.2.7 Obtención de la dinámica total del brazo articulado.

Para obtener la dinámica total es necesario sumar los elementos correspondientes de cada matriz de inercia

$$\begin{aligned} d_{11} &= d_{11,1} + d_{11,2} + d_{11,3} + d_{11,4} + d_{11,5} + d_{11,6} \\ d_{12} &= d_{12,2} + d_{12,3} + d_{12,4} + d_{12,5} + d_{12,6} \\ d_{13} &= d_{13,3} + d_{13,4} + d_{13,5} + d_{13,6} \\ d_{14} &= d_{14,4} + d_{14,5} + d_{14,6} \\ d_{15} &= d_{15,5} + d_{15,6} \\ d_{16} &= d_{16,6} \\ d_{21} &= d_{21,2} + d_{21,3} + d_{21,4} + d_{21,5} + d_{21,6} \\ d_{22} &= d_{22,2} + d_{22,3} + d_{22,4} + d_{22,5} + d_{22,6} \\ d_{23} &= d_{23,3} + d_{23,4} + d_{23,5} + d_{23,6} \\ d_{24} &= d_{24,4} + d_{24,5} + d_{24,6} \\ d_{25} &= d_{25,5} + d_{25,6} \\ d_{26} &= d_{26,6} \\ d_{31} &= d_{31,3} + d_{31,4} + d_{31,5} + d_{31,6} \\ d_{32} &= d_{32,3} + d_{32,4} + d_{32,5} + d_{32,6} \\ d_{33} &= d_{33,3} + d_{33,4} + d_{33,5} + d_{33,6} \\ d_{34} &= d_{34,4} + d_{34,5} + d_{34,6} \\ d_{35} &= d_{35,5} + d_{35,6} \\ d_{36} &= d_{36,6} \\ d_{41} &= d_{41,4} + d_{41,5} + d_{41,6} \\ d_{42} &= d_{42,4} + d_{42,5} + d_{42,6} \\ d_{43} &= d_{43,4} + d_{43,5} + d_{43,6} \\ d_{44} &= d_{44,4} + d_{44,5} + d_{44,6} \\ d_{45} &= d_{45,5} + d_{45,6} \\ d_{46} &= d_{46,6} \\ d_{51} &= d_{51,5} + d_{51,6} \\ d_{52} &= d_{52,5} + d_{52,6} \\ d_{53} &= d_{53,5} + d_{53,6} \\ d_{54} &= d_{54,5} + d_{54,6} \\ d_{55} &= d_{55,5} + d_{55,6} \\ d_{56} &= d_{56,6} \\ d_{61} &= d_{61,1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{62} &= d_{62,2} \\ d_{63} &= d_{63,3} \\ d_{64} &= d_{64,4} \\ d_{65} &= d_{65,5} \\ d_{66} &= d_{66,6} \end{aligned}$$

Para la matriz centrífuga y de Coriolis se realiza lo mismo que la matriz de inercia.

Ya que se tienen tanto la matriz de inercia y la matriz de centrífuga y de Coriolis solo queda obtener el vector de gravedad, el cual se obtiene usando la energía potencial de los eslabones del brazo articulado esto es

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6$$

$$V_1 = l_{c1} g m_1$$

$$V_2 = m_2 g (l_1 + l_{c2} \sin \theta_2)$$

$$V_3 = m_{s1} g (l_1 + l_2 \sin \theta_2 + l_{c3} \sin(\theta_2 + \theta_3)) + m_s g (l_1 + l_2 \sin \theta_2)$$

$$V_4 = m_4 g (l_1 + l_2 \sin \theta_2 + l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3))$$

$$V_5 = m_5 g (l_1 + l_2 \sin \theta_2 + l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) + l_{c4} \sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4))$$

$$V_6 = m_6 g (l_1 + l_2 \sin \theta_2 + l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) + l_4 \sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) - l_{c5} \cos \theta_5 \cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4))$$

$$\varphi_1 = \frac{\partial V}{\partial \theta_1}$$

$$\varphi_2 = \frac{\partial V}{\partial \theta_2}$$

$$\varphi_3 = \frac{\partial V}{\partial \theta_3}$$

$$\varphi_4 = \frac{\partial V}{\partial \theta_4}$$

$$\varphi_5 = \frac{\partial V}{\partial \theta_5}$$

$$\varphi_6 = \frac{\partial V}{\partial \theta_6}$$

De esta manera el modelo dinámico queda de la forma

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} & d_{45} & d_{46} \\ d_{51} & d_{52} & d_{53} & d_{54} & d_{55} & d_{56} \\ d_{61} & d_{62} & d_{63} & d_{64} & d_{65} & d_{66} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{bmatrix} \quad (7)$$

3. SIMULACION Y RESULTADOS

Para comprobar que el modelo dinámico fuera correcto se realizó una simulación en SIMSCAPE de MATLAB, usando cilindros en los eslabones para conocer los momentos de inercia de forma correcta, se usaron las distancias del robot real del laboratorio, el brazo articulado en SIMSCAPE se puede ver en la figura 9.

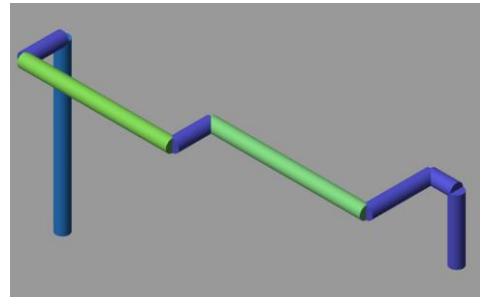


Fig. 9. Diagrama alambre en SIMSCAPE

En la tabla 8 se muestran los momentos de inercia, distancias totales y de los centros de masa de los eslabones, tomando un pedo se cada cilindro de 1 kg.

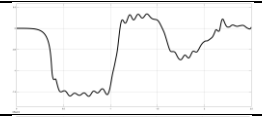
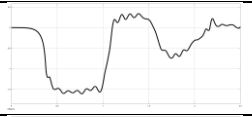
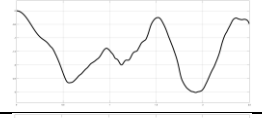
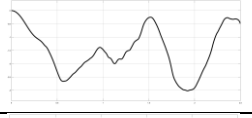
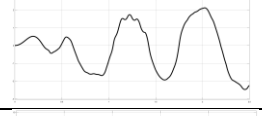
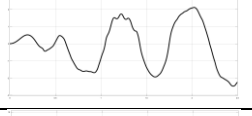
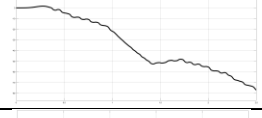
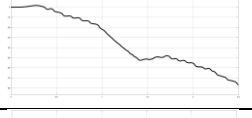
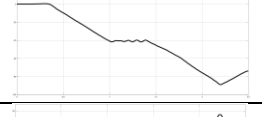
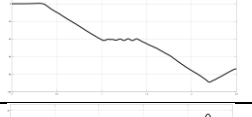
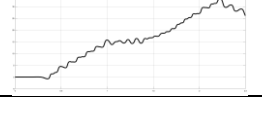
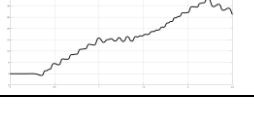
Tabla 8. Momentos de inercia y distancia del manipulador.

Primera articulación.	Segunda articulación.
$a_1 = 6 \text{ cm}$ $a_{c1} = 3 \text{ cm}$ $I_{zz1} = 3.75 \times 10^{-4} \text{ kgm}^2$	$l_2 = 23 \text{ cm}$ $l_{c2} = 11.5 \text{ cm}$ $I_{xx2} = 5 \times 10^{-5} \text{ kgm}^2$ $I_{yy2} = 4.43 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2$ $I_{zz2} = 4.43 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2$
Tercera articulación.	Cuarta articulación.
$a_1 = 6 \text{ cm}$ $a_{c1} = 3 \text{ cm}$ $I_{xxs} = 3.25 \times 10^{-4} \text{ kgm}^2$ $I_{yys} = 3.25 \times 10^{-4} \text{ kgm}^2$ $I_{zss} = 5 \times 10^{-5} \text{ kgm}^2$ $l_3 = 24 \text{ cm}$	$a_2 = 10 \text{ cm}$ $a_{c2} = 5 \text{ cm}$ $I_{xx4} = 8.583 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2$ $I_{yy4} = 8.583 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2$ $I_{zz4} = 5 \times 10^{-5} \text{ kgm}^2$

$l_{c3} = 12 \text{ cm}$ $I_{xxs1} = 5 \times 10^{-5} \text{ kgm}^2$ $I_{yys1} = 4.825 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2$ $I_{zzs1} = 4.825 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2$	
Quinta articulación.	Sexta articulación.
$l_4 = 4 \text{ cm}$ $l_{c4} = 2 \text{ cm}$ $I_{xx5} = 1.583 \times 10^{-4} \text{ kgm}^2$ $I_{yy5} = 1.583 \times 10^{-4} \text{ kgm}^2$ $I_{zz5} = 5 \times 10^{-5} \text{ kgm}^2$	$l_5 = 10 \text{ cm}$ $l_{c5} = 5 \text{ cm}$ $I_{xx6} = 8.583 \times 10^{-4} \text{ kgm}^2$ $I_{yy6} = 8.583 \times 10^{-4} \text{ kgm}^2$ $I_{zz6} = 5 \times 10^{-5} \text{ kgm}^2$

Ya que se tienen los parámetros del manipulador se realiza una simulación en SIMULINK con la ecuación 7 y otra en SIMSCAPE con el manipulador de la figura 10, los resultados se ven en la tabla 9.

Tabla 9. Comprobación del modelo dinámico.

	SIMULINK	SIMSCAPE
Primera Posición.		
Segunda posición.		
Tercera posición.		
Cuarta posición.		
Quinta posición.		
Sexta posición.		

En la tabla 9 se puede ver como las gráficas de posición de cada grado de libertad del modelo obtenido y simulado en SIMULINK son iguales, a la simulación del brazo articulado realizado en SIMSCAPE, por lo que el modelo es válido.

4. CONCLUSIONES.

En el desarrollo del modelo dinámico del brazo articulado se pudo ver que entre más grados de libertad se tenían, mayor era el número de términos que contenía, haciéndolo un sistema mecánico muy complejo. En este manipulador el cual cuenta con seis grados de libertad se tienen 36 términos tanto en la matriz de inercia como la centrífuga y de Coriolis y otros 6 en el vector de gravedad siendo un modelo muy complicado, además de esto en cada término se encuentran funciones trigonométricas haciéndolo un sistema no lineal.

El uso de herramientas como SIMSCAPE y SIMULINK para verificar si la dinámica es correcta es de suma importancia, ya que de esta manera podemos validar los modelos dinámicos que se presentan.

Para trabajo posterior consistirá en la aplicación de una ley de control al modelo dinámico del brazo articulado, el cual es altamente no lineal.

5. REFERENCIAS.

- [1] Luh J, Walker M, Paul R. (1980) "On-Line Computational Scheme for Mechanical Manipulators", ASME <https://doi.org/10.1115/1.3149599>
- [2] Hollerbach J. (1980) "A Recursive Lagrangian Formulation of Manipulator Dynamics and a Comparative Study of Dynamics Formulation Complexity", IEEE 10.1109/TSMC.1980.4308393
- [3] Sciavicco L, Siciliano B, Villani L. (1995). "Lagrange and Newton-Euler dynamic modeling of a gear-driven robot manipulator with inclusion of motor inertia effects". Taylor & Francis <https://doi.org/10.1163/156855395X00427>.
- [4] Mohammed A, Eltayeb A, (2018), "Dynamics and Control of a Two-link Manipulator using PID and Sliding Mode Control", IEEE 10.1109/ICCCSEE.2018.8515795.
- [5] Fahimi F., *Autonomous Robots. Modeling, Path Planning, and Control*, Springer, 2009, pp 147-159.
- [6] Ferrera A, Magnani L, (2006), "Motion Control of Rigid Robot Manipulators via First and Second Order Sliding Modes", SPRINGER 10.1007/s10846-006-9101-1.
- [7] Utkin, V., Guldner, J., Shi, J., *Sliding Mode Control in Electro-Mechanical Systems*, CRC Press, 2009
- [8] Craig J. J., *Robótica tercera edición*, Pearson, 2006
- [9] Spong, M., y Vidyasagar, M., *Robot dynamics and control*, Wiley India, 2008