

## FORMALISMO MATEMÁTICO EN LA OPERACIÓN DEL MOVIMIENTO DE TRENES

### “ELECTRO 2020”

Estrada-Velarde L. H.<sup>1</sup>, González-Castolo J. C.<sup>2</sup>, Ramos-Cabral S.<sup>3</sup>

Ferrocarril Mexicano S.A de C.V.<sup>1</sup>, Universidad de Guadalajara CUCEA<sup>2</sup>, Universidad de Guadalajara CUVALLES<sup>3</sup>

Departamento de Operación de Sistemas<sup>1</sup>, Departamento de Sistemas de Información<sup>2</sup>, Departamento de Ciencias Computacionales e Ingenierías<sup>3</sup>

Bosque de Ciruelos #99, Col. Bosques de las Lomas, Del Miguel Hidalgo, Cd. de México, México<sup>1</sup>,  
Periférico Norte #799, Col. Los Belenes, Zapopan, Jal. México<sup>2</sup>, Carr. Guadalajara-Ameca Km. 45.5,  
Jal. México<sup>3</sup>

Tels. 33 3837 2000<sup>1</sup>, 33 3770 3300<sup>2</sup>, 375 75 80 500<sup>3</sup>

[lhestradav@hotmail.com](mailto:lhestradav@hotmail.com), [jcgcastolo@hotmail.com](mailto:jcgcastolo@hotmail.com), [silviarc@valles.udg.mx](mailto:silviarc@valles.udg.mx)

#### RESUMEN

En este artículo se presenta un trabajo de investigación donde se propone un modelo formal de la operación del movimiento de trenes, basado en redes de Petri. El formalismo favorece la solución del problema de planificación de colisiones de trenes en línea, a fin de apoyar al personal que se desempeña como controlador de tráfico, para la realización de la operación de movimiento y control, tras haber ocurrido demoras o bloqueos provocados por accidentes, mantenimiento de vía o bien cambio en las prioridades de los servicios.

Palabras clave: Redes de Petri, Modelado, Control de Movimiento de Trenes, Resolución de colisiones.

#### ABSTRACT

This article presents a research work that proposes a formal model of the trains motion operation, based on Petri nets. The formalism favors the solution of the planning of train encounters in line, in order to support the personnel that work as a traffic controller, to carry out the movement and control operation, after having had delays or blockages caused by accidents, track maintenance or change in-service recommendations.

Key words: Petri nets, Modeling, Trains motion control, Solving of collisions

#### 1. INTRODUCCIÓN

En los últimos años, el tráfico ferroviario ha crecido mucho, lo cual crea la necesidad de optimizar la infraestructura [1]. Gracias a los desarrollos en sistemas informáticos, los avances en los ámbitos de la optimización y la gestión inteligente de los recursos, los administradores de tráfico pueden optimizar el uso de los recursos disponibles, obtener horarios más robustos y conclusiones útiles acerca de la capacidad de las líneas [2] [3]. Hay una gran cantidad de literatura que se ocupa de la programación de tráfico de los trenes a fin de reducir al mínimo los retrasos o los conflictos por demora. Un programa optimizado conlleva un elevado riesgo de demora [4] [5]. Se plantea que la solución óptima exacta de un problema de planificación, en sistemas de transporte, es bastante compleja,

difícil y hasta imposible de obtener en tiempo finito debido a una explosión de combinatoria [6]. Algunos autores proponen la optimización basada en simulación para atender el problema [7], sin embargo, aunque parece ofrecer un enfoque apropiado, aparecen brechas significativas entre la teoría y la práctica en el campo logístico. Las limitaciones de la simulación, surgen de la incapacidad de evaluar más de una fracción del inmenso rango de opciones disponibles [8].

Debido a que los problemas de los sistemas de control de tráfico tienden a ser más complejos, se tiene la necesidad de una herramienta efectiva de diseño para generar tanto el *sistema de control de sucesos* como la *implementación de bajo nivel*. En este contexto, las *redes de Petri* (RP) se tornan importantes porque representan el más efectivo método para atender tanto *el diseño* como *la implementación* [9]. La conversión de dichas RP en aplicaciones de tiempo real, hoy día han sido simplificadas mediante el advenimiento de *la metodología de lógica de símbolos*. Esta técnica se desarrolla para *RP normales* [10], *RP P-timed* [11], *RP T-timed* [12] y *RP Coloreadas* [13]. Los conceptos son extendidos para concordar con los controladores de RP que incluyen actuadores y sensores [14].

El uso de las RP en el control de trenes bajo la lógica del control de fallos, se identifica como un potencial mecanismo de control que ayudará a identificar y reducir los bloqueos de línea provocados por servicios no planificados (trenes extra o cancelados) o bien por un suceso externo como el caso de accidentes o incidentes [15]. Por tanto, el uso de RP en el modelado del movimiento de trenes, se presume ayudará a reducir bloqueos provocados por fallos en la toma de decisión de los controladores de tráfico o bien tras haber ocurrido alguna disrupción en el sistema, en cuyo caso ayudará a re-evaluar el escenario en búsqueda de una solución coherente.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera. En la sección 2 se presenta el marco teórico sobre el que se basa el modelo. La sección 3 describe el método utilizado para hacer el modelado. La descripción del modelo propuesto se presenta en la sección 4. En la sección 5 se presentan modelos más

elaborados que atienden los requerimientos de visualización del movimiento de trenes. Finalmente, en la sección 6 se dan las conclusiones.

## 2. MARCO TEÓRICO

Una *RP* está formada por lugares y transiciones, unidos por arcos dirigidos. Cada lugar puede o no contener marcas. El conjunto de marcas asociadas a cada uno de los lugares en un momento dado, constituye un marcado de la *RP*. Para la descripción funcional de sistemas concurrentes los marcados representan estados y las transiciones sucesos, que dependen del cumplimiento de determinadas condiciones [16].

Podemos definir una *RP* como una 5-upla:

$RP = (P, T, F, W, M_0)$ , donde:

$P = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$  es un conjunto finito no vacío de lugares

$T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  es un conjunto finito no vacío de transiciones

$P \cap T = \emptyset$

$F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$  es el conjunto de arcos dirigidos

$W: F \rightarrow \{1, 2, 3, \dots\}$  es una función de pesos

$M_i: P \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$  es el marcado inicial de la red // define un número inicial de marcas por lugar

Las *RP* tienen una representación gráfica y una matemática.

### 2.1 Representación grafica

La *RP* puede considerarse como un bi-grafo dirigido, donde los nodos son representados por lugares y transiciones. Un círculo representa un lugar, una barra representa una transición y un arco dirigido conecta lugares y transiciones, Fig 1. Un arco dirigido desde un lugar  $p$  a una transición  $t$  define  $p$  como un lugar de entrada para  $t$ . Un lugar de salida se indica con un arco desde la transición al lugar. Los arcos se etiquetan con sus pesos (enteros positivos). Si una de esas etiquetas se omite, significa que el arco tiene peso uno. Las marcas se representan como puntos negros en los lugares [16]. Los lugares que contienen marcas se consideran lugares activos. A las transiciones se les asocia eventos (funciones lógicas de las variables de entrada). Una transición se dice que está *sensibilizada* cuando todos sus lugares de entrada están marcados. Cuando ocurre un evento asociado a una transición sensibilizada, se dice que la transición está *validada* y en tales condiciones es una transición que se *dispara*.

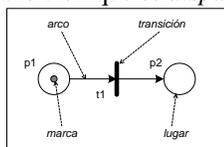


Figura 1. Representación gráfica de una *RP*.

### 2.2 Representación matemática

Una transición tiene un determinado número de lugares de entrada (o precondiciones) y de lugares de salida (o post condiciones). Cada uno de éstos se puede representar por una matriz binaria de dos dimensiones, donde las columnas representan las transiciones, las filas los lugares y las celdas la conexión entre ambas. Las matrices reciben los nombres de

*matriz de incidencia previa* y *matriz de incidencia posterior*, respectivamente [16].

Podemos decir que una *RP* se encuentra definida en forma matricial por medio de dos matrices. Sea  $n = |P|$  (número de lugares) y  $m = |T|$  (número de transiciones).

Se denominan:

*Matriz de incidencia previa:*

$$C^- = [c^-_{ij}]^{n \times m} \text{ en la que } c^-_{ij} = \text{Pre}(p_i, t_j).$$

*Matriz de incidencia posterior:*

$$C^+ = [c^+_{ij}]^{n \times m} \text{ en la que } c^+_{ij} = \text{Post}(t_i, p_j).$$

Matriz de incidencia de  $N$ :  $C = C^+ - C^-$ .

Un marcado es una función que asigna a cada lugar un entero no negativo (marca). Se dice que un lugar  $p$  está marcado con  $k$  marcas, si el marcado asigna al lugar  $p$  un entero  $k$  [16].

Un marcado  $M$  se representa mediante un vector con tantos componentes como lugares tenga la red. La cantidad de marcas en el lugar  $p$  será  $M(p)$ . El marcado cambia al disparar las transiciones. Una transición se *dispara* si y solo si está *validada* y *sensibilizada*. Cuando una transición se *dispara* desaparecen las marcas de los lugares de entrada y se añade una marca a cada uno de los lugares de salida de dicha transición.

Una transición  $t \in T$  está *sensibilizada* (habilitada) para un marcado  $M$  dado, *sii*  $\forall p \in \bullet t$  se verifica  $M(p) \geq \text{Pre}(p, t)$ . Si  $t$  está *habilitada* para un marcado  $M$  entonces  $t$  puede *dispararse*.

En la operación se alcanza un nuevo marcado  $M_0$ , y se denota por  $M[t] > M_0$ , el cual resulta de quitar  $\text{Pre}(p, t)$  marcas de cada lugar  $p \in \bullet t$  y añadir  $\text{Post}(t, p)$  marcas a cada lugar  $p \in t \bullet$ .

El cambio en el marcado está dado por la ecuación:

$$M_0(p) = M(p) - \text{Pre}(p, t) + \text{Post}(t, p), \quad \forall p \in P$$

## 3. METODO

A fin de poder modelar el problema de colisiones de trenes y en virtud de que los problemas de transporte son muy complejos derivado de la cantidad de variables a considerar, se plantea para el modelado del problema la estrategia de partir de un modelo simple a uno complejo. Se considera que existe una persona llamada *controlador de tráfico* por cada *territorio* y en promedio un *territorio* cuenta con al menos 25 puntos de encuentro, llamados *ladero* o *escape*. El modelo inicial considera las reglas básicas, para posteriormente agregar complejidad a dicho modelo mediante la integración gradual de cada nueva regla de tráfico aplicable a las necesidades operativas. Por tanto, es necesario dividirlo en varias partes. Primeramente, se aborda el análisis del problema, seguido de éste se plantearán modelos generalizados para cada segmento de infraestructura o problema a atacar para, finalmente, dejar formalizado el problema mediante *RP*.

### 3.1 Bases

Existen dos tipos de lugares. Los del primer tipo representan ubicaciones y por tanto almacenan trenes. Los del segundo tipo representan los recursos compartidos, que son asociados a segmentos de vía. Para cada marca en los lugares que representan recursos se dice que ésta representa un segmento de

vía en uso y cada marca en un lugar que representa trenes, significa un tren, Fig 2.

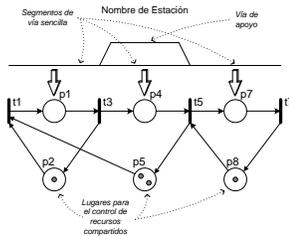


Figura 2. Definiciones básicas del problema.

### 3.2 Modelado de una vía sencilla

Al contar dentro de la infraestructura ferroviaria con vía sencilla para el movimiento de trenes en ambos sentidos, se hace necesaria la resolución de colisiones, ya que un mismo tramo puede estar en conflicto para más de un tren. Para atender lo anterior, se hace necesario el uso de exclusión mutua con el fin de evitar que un mismo tramo se tome por más de un tren en el mismo sentido u opuesto. Para el caso de una vía sencilla, al lugar que controla la exclusión mutua se le asigna una marca, Fig 3. Se consideran los lugares  $p_1$  y  $p_5$  como los lugares que controlan el segmento de vía sencilla anterior al escape, así como los lugares  $p_3$  y  $p_7$  como los lugares que controlan el segmento de vía sencilla posterior. Como se puede apreciar, para que las transiciones  $t_2$  o  $t_5$  se encuentren habilitadas, deberá existir una marca en el lugar  $p_4$  lo cual representa que el segmento de vía está libre y además deberá existir al menos una marca en los lugares  $p_1$  o  $p_7$  que representa un tren que viajará en un sentido u otro. Cuando las transiciones  $t_2$  o  $t_5$  son disparadas, el modelo toma una marca del lugar  $p_1$  o  $p_7$  y la marca de  $p_4$ , la cual es devuelta a su posición hasta que las transiciones  $t_4$  o  $t_5$  son disparadas, lo que indica que el tren ha dejado libre el segmento que fue ocupado por éste.

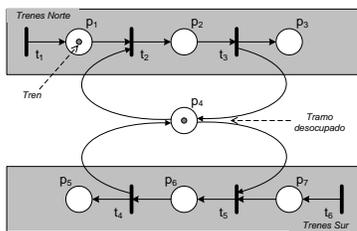


Figura 3. Modelo de una vía sencilla.

Para este modelo las transiciones  $t_1$  y  $t_6$  son alimentadoras, lo que significa que cuando un tren está programado para entrar en el segmento, se depositará una marca en los lugares  $p_1$  o  $p_7$  en función de las conexiones con el resto de la red y los lugares  $p_3$  y  $p_5$  son sumidero para cuando representen un extremo de la red o bien alimentadoras de otros segmentos. Para lograr modelar un solo segmento de vía y que éste sólo cuente con vía sencilla, se utiliza una marca en el lugar de control de exclusión. En caso de que exista más de una vía, se deberán colocar como marcado inicial la misma cantidad de marcas como cantidad de vías a modelar. De este modo se evita que un

tramo esté ocupado por más de un tren en cualquiera de sus sentidos, pero no garantiza que no ocurran conflictos entre dos trenes en un solo segmento de vía sencilla, ya que, si se agrega un nuevo segmento, puede ocurrir que el segmento a la izquierda  $t_1$  cuente con un Tren Norte y viceversa, lo que conlleva a controlar todos los segmentos intermedios entre estaciones. Se debe considerar en dónde los trenes pueden encontrarse para lo que se modelan los puntos de encuentro de acuerdo a la Fig 4.

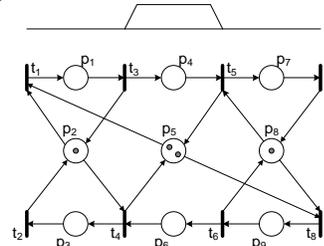
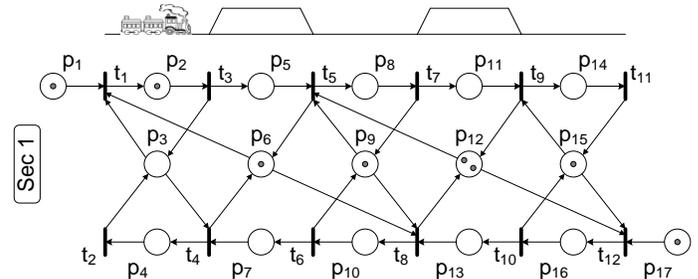


Figura 4. Modelo de una vía sencilla.

### 4. MODELO

En la Fig 4 se muestra el modelo de un segmento de vía con un escape intermedio y sus respectivos segmentos de vía anterior y posterior, la cual condiciona la inclusión de un nuevo tren a los segmentos anterior y posterior del escape y que este último cuente con vías suficientes para evitar tener más trenes que vías en la estación donde se realiza el encuentro. Las transiciones  $t_1$  (Tren Norte) y  $t_8$  (Tren Sur) estarán habilitadas sólo si  $p_5$  cuenta con marcas, pero además si los lugares  $p_2$  o  $p_8$  cuentan con su respectiva marca. Así un tren con dirección norte podrá entrar si el tramo controlado por  $p_2$  y el escape controlado por  $p_5$  cuentan con disponibilidad de vías, y un Tren Sur podrá entrar si el tramo controlado por  $p_8$  y el escape controlado por  $p_5$  cuentan con sus marcas respectivas. El modelo descrito se puede repetir tantas veces como segmentos de vía existen en un territorio dado.

A continuación, se muestra unas secuencias del comportamiento de la red con 2 escapes y 3 trenes. Se considera esta red como la base de la solución.



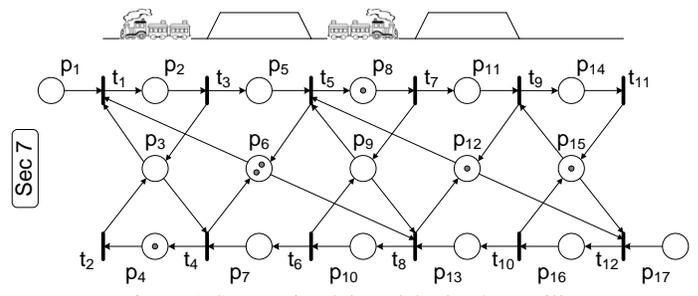
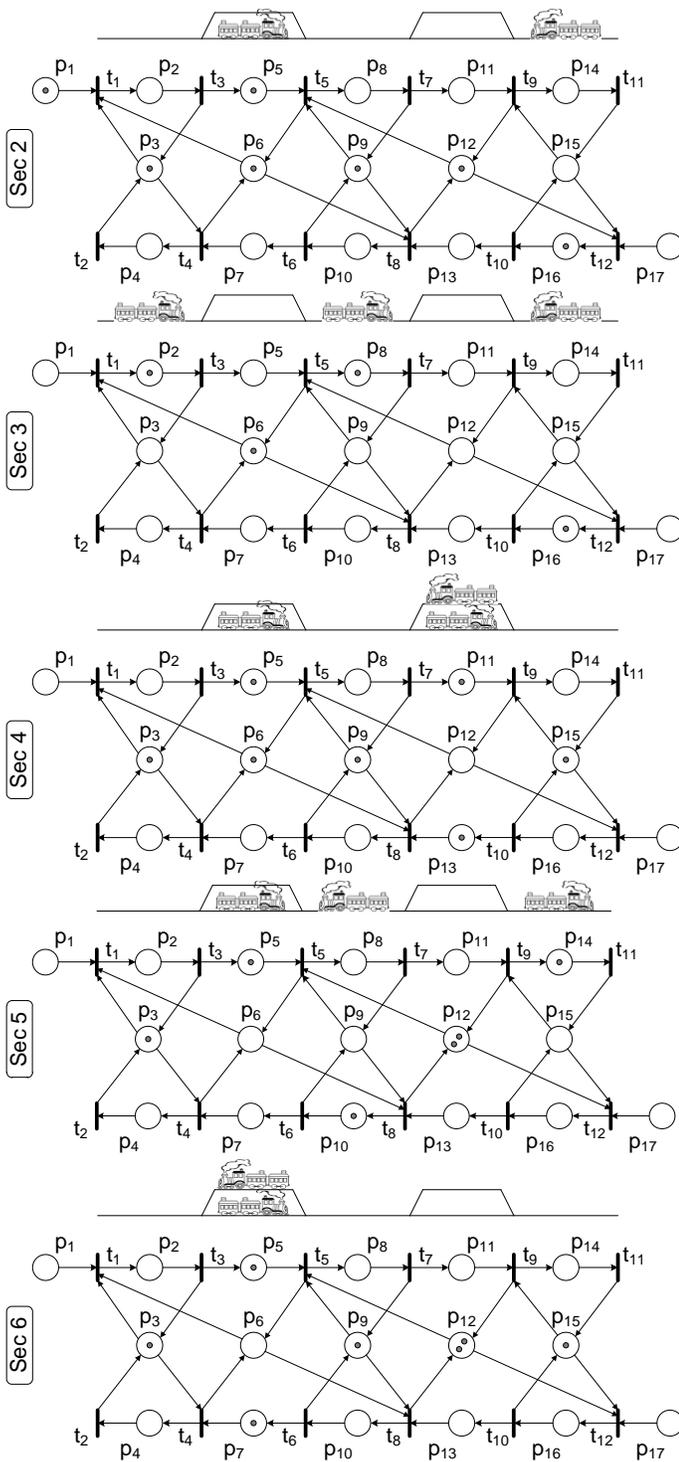


Figura 5. Secuencias del modelo de vía sencilla.

**Sec1:** Se muestra una marca en  $p_1$  y  $p_2$  respectivamente, lo que indica que existe un tren moviéndose de izquierda a derecha. La marca en  $p_{17}$  que indica que existe un tren preparado para correr de derecha a izquierda. Los lugares  $p_3$ ,  $p_9$  y  $p_{15}$  representan segmentos sencillos de vía en donde el primero, al no contar con ninguna marca, indica que el tramo está utilizado por un tren. Los otros dos tramos, al contar con una marca, representan que este segmento no está ocupado por ningún tren. Los lugares  $p_6$  y  $p_{12}$  representan segmentos dobles de vía en donde se pueden almacenar o encontrar trenes, tantos como marcas cuente cada uno de éstos. El primero de éstos cuenta con 1 marca, que representa la ocupación de uno de sus segmentos y en el segundo, que tiene 2 marcas, representa la existencia de 2 tramos desocupados de vía. Claramente se puede observar que sólo las transiciones  $t_3$  y  $t_{12}$  se encuentran habilitadas, lo que indica que ambos trenes pueden proseguir su marcha sin detenerse.

**Sec2:** Al disparar las transiciones  $t_3$  y  $t_{12}$ , se muestra el progreso en el recorrido de los trenes, el tren de la izquierda deja libre el segmento controlado por la marca en el lugar  $p_3$ , y el tren de la derecha toma la marca en  $p_{15}$  para evitar la incursión de cualquier tren en cualquier sentido en el mismo segmento. Tras este movimiento se habilitan las transiciones  $t_1$ ,  $t_5$  y  $t_{10}$ . Como se puede apreciar, la fila de lugares en la porción superior de la red permite, en caso de contener una marca, identificar la existencia de un tren moviéndose de izquierda a derecha y en contraposición los lugares de la porción inferior de la red permiten visualizar la existencia de trenes moviéndose de derecha a izquierda, si contienen una marca. Los lugares en la porción central de la red fungen como control de flujo y permiten el paso de trenes de un segmento sencillo a uno doble de manera inmediata y de un segmento de inicio o doble a uno sencillo, sólo si este último está libre y la vía múltiple siguiente tiene una vía que permita recibir el tren. Una vez que un tren concluye su recorrido, su marca correspondiente se destruye, esto se ha modelado mediante las transiciones  $t_2$  y  $t_{11}$ . Por último, se describen los lugares  $p_1$  y  $p_{17}$  como lugares que alimentan trenes que pueden provenir de otros segmentos o que están planificados para iniciar en un territorio, lo que quiere decir que se depositará una marca en el momento en que un tren esté listo para iniciar su recorrido en el segmento modelado.

**Sec3:** Una vez con el marcado de la secuencia 2, se procede al disparo de las transiciones habilitadas, en donde se dispara la transición  $t_1$  para un tren de inicio,  $t_5$  para un tren que sale del escape y  $t_{10}$  de un tren contrario al entrar a una estación. Aquí se tienen 3 trenes en movimiento, todos entre estaciones sin ninguna restricción.

**Sec4:** Los disparos siguientes en las transiciones  $t_3$ ,  $t_7$  y  $t_{10}$ , dan como resultado la inclusión de un tren sobre la estación de la izquierda y el encuentro entre 2 trenes en el escape de la derecha. Este nuevo escenario deja bloqueado al segundo tren en dirección hacia la derecha ya que, de permitirse dicha acción, se generaría una condición no deseada en virtud de que el escape a la derecha no tiene segmentos libres. Por tanto, podrá avanzar hasta que uno de los trenes en el escape libere uno de los segmentos.

**Sec5:** Debido a que el tren en el escape a la izquierda se encuentra inhabilitado para continuar su marcha, se disparan sólo las transiciones habilitadas, que son  $t_8$  y  $t_9$ , las cuales permiten sólo circular a los trenes que se encuentran librándose en el escape de la derecha.

**Sec6:** Se observa que el primer tren en dirección derecha llega a su destino y por tanto su marca se destruye, en tanto que en la estación de la izquierda se provoca otro libraje de trenes.

**Sec7:** Por último, se muestra la posición de los trenes tras su encuentro; se deja hasta aquí la simulación de este recorrido, ya que se asume que el resto de los eventos son repetitivos cuando nuevas marcas son agregadas en los lugares de inicio  $p_1$  y  $p_{17}$ .

### 5. MODELADO DE UNA CONEXIÓN

Bajo el concepto de la red ya propuesta y de que existe un punto en común para las tres diferentes rutas, se propone tomar como base dicha propuesta e integrar la bifurcación hacia dos segmentos iguales. La Fig 6, muestra la conexión entre tres diferentes segmentos de vía, donde los lugares  $p_1$  a  $p_4$ ,  $p_{22}$  a  $p_{27}$  y las transiciones  $t_1$  a  $t_4$ ,  $t_{21}$  a  $t_{24}$  pertenecen al primer segmento de vía. Los lugares  $p_6$  a  $p_8$ ,  $p_9$  a  $p_{12}$ ,  $p_{29}$  a  $p_{31}$  y las transiciones  $t_5$  a  $t_8$ ,  $t_9$  a  $t_{12}$ , pertenecen al segundo segmento. Los lugares  $p_{14}$  a  $p_{20}$ ,  $p_{32}$  a  $p_{34}$  y las transiciones  $t_{13}$  a  $t_{20}$  pertenecen al tercer segmento. El lugar  $p_{28}$  representa el recurso compartido, el número de marcas que este lugar contiene simboliza el número de vías en común entre los tres segmentos de vía. Los lugares  $p_5$ ,  $p_{13}$  y  $p_{21}$ , junto con las transiciones  $t_{25}$ ,  $t_{26}$  y  $t_{27}$  son lugares y transiciones en donde se bifurcan los trenes de acuerdo a su recorrido y se controla que sólo sean ocupados por la cantidad de trenes que pueden ser almacenados de acuerdo a la capacidad de vías que se modelan por el lugar  $p_{28}$  y la cantidad de marcas asociadas a éste.

Cabe señalar que una marca en los lugares  $p_5$ ,  $p_{13}$  o  $p_{21}$ , habilitan a más de una transición y será disparada la transición que se encuentre en la ruta de la marca dentro de la red. La ruta ya se encuentra predefinida dentro del recorrido del tren.

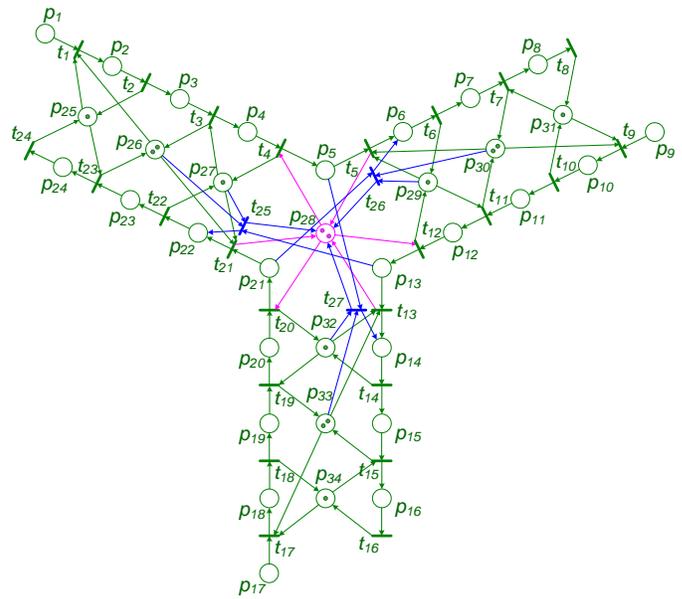


Figura 6. Modelado de una conexión.

Para incluir el inicio de nuevos servicios, se tiene la red de la Fig 7. Se aprecia la inclusión de los lugares  $p_{29}$ ,  $p_{30}$  y  $p_{31}$ , así como las transiciones  $t_{25}$ ,  $t_{26}$  y  $t_{27}$ . Estos elementos permiten la inserción de nuevos trenes desde el nodo principal y hacia cada destino de la red.

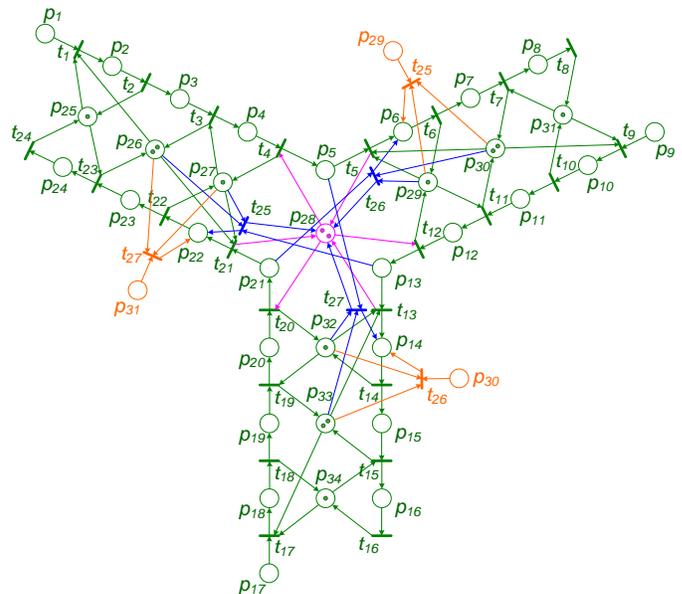


Figura 7. Modelado de una conexión que considera nuevos servicios.

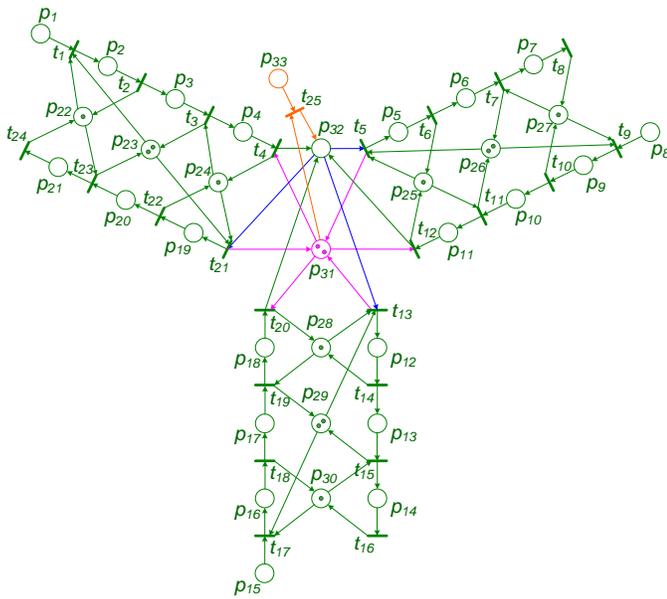


Figura 8. Modelado simplificado de una conexión que toma en consideración nuevos servicios.

Para contemplar que un tren, desde un extremo hacia el nodo, pueda regresar hacia su origen, tal y como es el caso de los trenes turno (un tren tipo turno es aquel cuyo origen y destino es el mismo), se propone el modelo de la Fig 8. La red está simplificada desde las anteriores versiones y, por ende, sí contempla el regreso de un tren en el nodo modelado. En esta nueva propuesta, se aprecia la fusión de algunos de los lugares y la eliminación de ciertas transiciones.

## 6. CONCLUSIONES

Se concluye que el modelado mediante *RP* es una técnica útil en la representación de sistemas de transporte que involucran los problemas relacionados con la industria ferroviaria, en donde, como se ha descrito a lo largo del presente documento, existen necesidades apremiantes en la solución óptima a problemas en la operación. Además, se puede afirmar que el problema de la ocupación de vía y el movimiento de trenes puede ser modelado mediante *RP*, cubriendo con ello el objetivo del presente trabajo. En trabajos futuros se estudiarán las políticas para la resolución de colisiones.

## 7. REFERENCIAS

[1] S. . Tschirner, A. W. Andersson y B. Sandblad, «Improved Railway Service by Shared Traffic Information,» *IEEE International Conference on Intelligent Rail Transportation Proceedings*, pp. 117-122, 2013.

[2] M. Salido y F. Barber, «Mathematical Solutions for Solving Periodic Railway Transportation,» *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2009, n° 728916, p. 19

pages , 2009.

[3] E. König y C. Schö'n, «Railway Delay Management with Passenger Rerouting Considering Train Capacity Constraints,» *European Journal of Operational Research*, vol. 12, 2020.

[4] A. Higgins, L. Ferreira y E. Kozan, «Optimisation of train schedules to achieve minimum transit times and maximum reliability,» *13th International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, vol. 122, pp. 589 - 614., 1996.

[5] M. Yaghini, M. M. Khoshraftar y M. Seyedabadi, «Railway passenger train delay prediction via neural network model,» *Journal of Advanced Transportation*, vol. 47, pp. 355-368, 2013.

[6] T. Mancini y A. Oddi, «Experimental evaluation of algorithms for solving problems with combinatorial explosion,» *Ai Communications*, vol. 28, pp. 159-160., 2015.

[7] J. Vlášek, L. Elis, J. Žahour, P. Štětka y K. Kosturik, «Software for rail traffic simulator,» de *21st Telecommunications forum TELFOR 2013*, Belgrade, 2013.

[8] F. Glover , J. Kelly y M. Laguna , «New Advances for weeding optimization and Simulation,» *WSC'99. 1999 Winter Simulation Conference Proceedings. 'Simulation - A Bridge to the Future'* , vol. 1, n° (Cat. No.99CH37038), pp. 255-260, 1999.

[9] G. Yasuda, «Model Based Design and Implementation of Hierarchical and Distributed Control for Robotic Flexible Manufacturing System Cells Using Petri Nets,» *Advanced Materials Research V*, Vols. %1 de %2211-212, pp. 856-860, 2011.

[10] Q. Hu, Y. Du y S. Yu, «Service net algebra based on logic Petri nets,» *Information Sciences*, vol. 268, p. 271-289, 2014.

[11] A. Meyer , M. Dellnitz y M. Hessel-von Molo, «Symmetries in timed continuous Petri nets,» *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, vol. 5, pp. 125-135., 2011.

[12] . A. Aybar y A. İftar, «Supervisory controller design to enforce some basic properties in timed-transition Petri nets

- using stretching,» *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, vol. 6, pp. 712-729, 2012.
- [13] J. Tkacz, «Symbolic Coloring of Petri Nets,» de *Design of Reconfigurable Logic Controllers. Studies in Systems, Decision and Control.*, vol. 45, Springer Cham, 2016, pp. 67-76.
- [14] . J. Tkacz y M. Adamski, «Modular Synthesis of Petri Nets,» de *Design of Reconfigurable Logic Controllers. Studies in Systems, Decision and Control*, vol. 45, Springer Cham, 2016, pp. 77-91.
- [15] R. Kanazy, S. Chafik, E. Niel y M. Zouagui, «Failure prognosis in discrete events systems based on extended Time petri nets: example of an electric car battery cell,» *4th Conference on Control and Fault Tolerant Systems*, pp. 276-281, 2019.
- [16] M. Silva, *Las Redes de Petri en la Automática y la informática*, Madrid: Editorial AC, 1985.