

## UNA FAMILIA EXTENSA DE REGULADORES PD CON GANANCIAS VARIABLES

Sánchez Brandon,<sup>a</sup> Rodríguez Ernesto,<sup>a</sup> Reyes Fernando,<sup>a</sup> Félix Olga,<sup>a</sup> Al-Hadithi Basil.<sup>b</sup>

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla,<sup>a</sup> Universidad Politécnica de Madrid.<sup>b</sup>

Grupo de Robótica Facultad de Ciencias de la Electrónica,<sup>a</sup> Departamento de Ingeniería Eléctrica,  
Electrónica, Automática y Física Aplicada, Escuela Superior de Ingeniería y Diseño Industria.<sup>b</sup>

Prolongación 24 Sur, Ciudad Universitaria, C.P. 72570, Puebla, Pue, México

Tel. (222)2295698

e-mail: brandon.sanchez@alumno.buap.mx, fernando.reyes@correo.buap.mx

### RESUMEN.

En el siguiente trabajo se presenta una familia extensa de reguladores Proporcional Derivativo (PD) con ganancias variables, proporcional y derivativa. La propuesta de control diseñada contiene una familia grande de ganancias variables con sintonía automática, compuestas por funciones dependientes del error de posición y la velocidad de movimiento del robot manipulador. Presentamos la propuesta de una función estricta de Lyapunov, para demostrar la estabilidad asintótica y global del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado. Finalmente, para medir su funcionalidad de la familia de reguladores, evaluamos dos casos particulares experimentalmente para comparar su desempeño con el regulador PD con ganancias constantes.

Palabras Clave: Robot Manipulador, Regulador, Ganancias Variables, Estabilidad de Lyapunov, Sintonía Automática.

### ABSTRACT.

The following work presents a large family of Proportional Derivative (PD) regulators with variable proportional derivative gains. The designed control scheme contains a large family of variable tuning gains with automatic tuning, structured as functions dependent on the position error and the speed of movement of the manipulator robot. We present the proposal for a strict Lyapunov function, to demonstrate the asymptotic and global stability of the equilibrium point of the closed-loop equation. Finally, to evaluate its functionality of the regulator family, we evaluated two particular cases experimentally to compare its performance with the PD regulator with constant gains.

Keywords: Robot Manipulators, Regulator, Variable Gains, Lyapunov Stability, Automatic Tuning.

### 1. INTRODUCCIÓN

La técnica de moldeo de energía, propuesta por Takegaki y Arimoto en 1981, es ampliamente utilizada por diversos investigadores para diseñar nuevos algoritmos de control. Los esquemas que se diseñan a partir de esta técnica, tienen sus ganancias constantes; obtener su valor numérico (sintonía) es complicado, no hay muchos métodos con rigor científico y por lo tanto el proceso de sintonización se realiza de manera

empírica, perjudicando al algoritmo de control, si no se realiza correctamente [11].

Los controladores auto sintonizables existen desde hace años, con diferentes concepciones. Uno de los algoritmos más modificados es el PD; su versión con ganancias constantes baja considerablemente su desempeño con una mala sintonía. Algunas de estas modificaciones al PD se presentan en [1], sintonía por lógica difusa [4], sintonía por esquemas de control inteligente [7] y en [6] se implementan dos controles inteligentes para la sintonía de las ganancias. En trabajos recientes, en [9] se propone un PD con ganancias variables dependientes del error de posición. Una familia de reguladores acotados con la ganancia derivativa variable se propone en [10] y para reguladores saturados en [11], también con ganancia derivativa variable.

Sin embargo, los trabajos reportados hasta ahora no proponen un regulador PD con ganancias variables, donde a su vez, contenga una familia grande de ganancias variables con sintonía automática, estructuradas como funciones dependientes del error de posición y la velocidad de movimiento del robot.

### 2. DINÁMICA DEL ROBOT

Considerando el modelo dinámico de un robot rígido de  $n$  grados de libertad, en cadena abierta y con articulaciones rotacionales, se describe de la siguiente manera.

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) = \boldsymbol{\tau} \quad (1)$$

dónde:  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de coordenadas generalizadas o posiciones articulares,  $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de velocidades articulares,  $\ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de aceleraciones articulares,  $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de inercia, simétrica y definida positiva,  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis,  $\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de fuerzas o pares gravitacionales y  $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de pares de fricción que incluye la fricción viscosa, de Coulomb y estática  $f_{e_i}$  de la  $i$ -ésima articulación del robot manipulador  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de pares o torques.

El modelo dinámico del robot manipulador cumple con las siguientes propiedades:

**Propiedad 1.**

La matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  y la derivada temporal de la matriz de inercia  $\dot{M}(\mathbf{q})$  satisfacen lo siguiente:

$$\dot{\mathbf{q}}^T \left[ \frac{1}{2} \dot{M}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \dot{\mathbf{q}}, \quad \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n \quad (2)$$

$$\dot{M}(\mathbf{q}) = C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \quad (3)$$

**Propiedad 2.** Para todos los robots que sólo contienen articulaciones rotacionales, entonces se cumple:

$$\|C(\mathbf{q}, \mathbf{y})\mathbf{z}\| \leq k_{ro} \|\mathbf{y}\| \|\mathbf{z}\| \quad (4)$$

Donde  $k_{ro} > 0 \forall \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ .

**Propiedad 3.**

Sean las constantes positivas  $k_{pl}$  y  $k_{pu}$  las cotas inferiores y superiores de la integral (5), respectivamente; en el intervalo cerrado  $k_{pu} \geq k_{pi}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) \geq k_{pl} \forall \tilde{q}_i \in \mathbb{R}$  para  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

$$\frac{1}{2} k_{pl} \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 \leq \int_0^{\tilde{\mathbf{q}}} \boldsymbol{\sigma}^T K_p(\boldsymbol{\sigma}) d\boldsymbol{\sigma} \leq \frac{1}{2} k_{pu} \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 \quad (5)$$

### 3. FAMILIA DE REGULADORES PD CON GANANCIAS VARIABLES

Se presenta una familia de reguladores Proporcional Derivativo (PD) con ganancias variables dependientes del error de posición y de la velocidad de movimiento del robot manipulador; ganancia proporcional y ganancia derivativa.

$$\boldsymbol{\tau} = K_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})\tilde{\mathbf{q}} - K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (6)$$

Donde  $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$ , siendo  $\mathbf{q}_d \in \mathbb{R}^n$  el vector de posición deseada y  $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  el vector de error de posición. Las matrices de ganancias variables  $K_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , son diagonales con las entradas  $k_{pi}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i)$  y  $k_{vi}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i)$ , respectivamente.

### 4. FAMILIA EXTENSA DE GANANCIAS VARIABLES

El trabajo presentado a la comunidad científica [3] fue fuente de inspiración para diseñar una familia extensa de ganancias variables con sintonía automática (7) y (8), proporcional y derivativa; dependientes del error de posición y la velocidad de movimiento del robot manipulador.

$$K_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} k_{p1}(\tilde{q}_1, \dot{q}_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & k_{pn}(\tilde{q}_n, \dot{q}_n) \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} k_{v1}(\tilde{q}_1, \dot{q}_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & k_{vn}(\tilde{q}_n, \dot{q}_n) \end{bmatrix} \quad (8)$$

Donde las entradas  $k_{pi}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i)$  y  $k_{vi}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i)$  la siguiente estructura:

$$k_{pi}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) = \hat{k}_{pi}(1 - \beta e^{-\beta f_{pi}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i)}) \quad (9)$$

$$k_{vi}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) = \hat{k}_{vi}(1 - \beta e^{-\beta f_{vi}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i)}) \quad (10)$$

Las funciones  $f_{pi}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i)$  y  $f_{vi}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$  y  $f_{pi}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) = f_{vi}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) = 0 \Leftrightarrow \tilde{q}_i = \dot{q}_i = 0$ . Los parámetros  $\hat{k}_{pi} > 0$ ,  $\hat{k}_{vi} > 0$  y  $\beta \in [0, 1]$ . Entonces, bajo las condiciones anteriores, observe que:  $k_{pi}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) > 0$  y  $k_{vi}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) > 0$ .

A partir de la familia de reguladores PD con ganancias variables (6) y el modelo dinámico del robot manipulador (1) se construye la ecuación en lazo cerrado (11).

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} \left[ K_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})\tilde{\mathbf{q}} - K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \mathbf{B}\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - C(\mathbf{q}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \right] \end{bmatrix} \quad (11)$$

Nótese que:  $\frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{q}} = (-I)\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}$  siendo  $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  la matriz identidad. También,  $\frac{d}{dt} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$  y  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}$ . Por lo tanto, queda demostrado que el origen de la ecuación en lazo cerrado es el único punto de equilibrio.

### 5. FUNCIÓN ESTRICTA DE LYAPUNOV

Desde el contexto del método directo de Lyapunov se propone la siguiente función de energía estricta.

$$V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \int_0^{\tilde{\mathbf{q}}} \boldsymbol{\sigma}^T K_p(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\sigma}}) d\boldsymbol{\sigma} - \epsilon \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (12)$$

Por notación

$$\int_0^{\tilde{\mathbf{q}}} \boldsymbol{\sigma}^T K_p(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\sigma}}) d\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=0}^n \sigma_i k_{pi}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) d\sigma_i \quad (13)$$

ε se define de la siguiente forma:

$$\epsilon(\|\tilde{\mathbf{q}}\|) = \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \quad (14)$$

$\epsilon_0$  es una constante positiva y  $\epsilon$  lo suficientemente pequeño para satisfacer lo siguiente:

$$\frac{\sqrt{k_{pl} \lambda_{\min}\{M(\mathbf{q})\}}}{\lambda_{\max}\{M(\mathbf{q})\}} > \epsilon > 0 \quad (15)$$

Usando la **Propiedad 3** la función estricta de Lyapunov está acotada: Observe que la condición (15) es suficiente para que la función estricta de Lyapunov (12) sea definida positiva

$$V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \geq \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \end{bmatrix}^T \mathbf{P} \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \end{bmatrix} \quad (16)$$

La matriz  $\mathbf{P}$  se compone:

- $\mathbf{P}(1,1) = k_{pl}$

- $P(1,2) = \lambda_{Max}\{M(q)\}$
- $P(1,2) = P(2,1)$
- $P(2,2) = \lambda_{min}\{M(q)\}$

## 6. DERIVADA CON RESPECTO AL TIEMPO DE LA FUNCIÓN DE LYAPUNOV

Derivando la función candidata de Lyapunov (12) y usando la regla de derivación de integrales de Leibniz, obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = & \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} + \\ & + \tilde{q}^T K_p(\tilde{q}, \dot{q}) \tilde{q} - \epsilon \tilde{q}^T \dot{M}(q) \tilde{q} \\ & - \epsilon \dot{q}^T M(q) \dot{q} - \\ & - \epsilon \dot{q}^T M(q) \tilde{q} - \epsilon \dot{q}^T M(q) \dot{q} \end{aligned} \quad (17)$$

Tomando en cuenta las trayectorias de la ecuación en lazo cerrado (11) y la **Propiedad 1** (anti simetría), la expresión (17) se reescribe:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = & -\dot{q}^T K_v(\tilde{q}, \dot{q}) \dot{q} - \dot{q}^T B \dot{q} - \\ & - \epsilon \tilde{q}^T K_p(\tilde{q}, \dot{q}) \tilde{q} + \epsilon \tilde{q}^T K_v(\tilde{q}, \dot{q}) \dot{q} + \\ & + \epsilon \tilde{q}^T B \dot{q} + \epsilon \tilde{q}^T C(q, \dot{q})^T \dot{q} - \epsilon \tilde{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} + \\ & + \dot{q}^T M(q) \dot{q} - \epsilon \dot{q}^T M(q) \dot{q} \end{aligned} \quad (18)$$

O bien.

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = & -\epsilon \tilde{q}^T K_p(\tilde{q}, \dot{q}) \tilde{q} \\ & - \dot{q}^T [K_v(\tilde{q}, \dot{q}) \dot{q} + B] \dot{q} \\ & + \epsilon \dot{q}^T [K_v(\tilde{q}, \dot{q}) \dot{q} + B] \dot{q} - \epsilon \tilde{q}^T C(q, \dot{q})^T \dot{q} - \\ & - \epsilon \dot{q}^T M(q) \dot{q} \end{aligned} \quad (19)$$

Usando la **Propiedad 2**.

$$\begin{aligned} -\epsilon \tilde{q}^T C(q, \dot{q})^T \dot{q} = & |-\epsilon \dot{q}^T C(q, \dot{q}) \tilde{q}| \\ \leq & \epsilon_0 k_{ro} \|\dot{q}\|^2 \end{aligned} \quad (20)$$

También:

$$\dot{\epsilon} = \frac{\epsilon_0}{\|\tilde{q}\|(1 + \|\tilde{q}\|)^2} \tilde{q}^T \dot{q} \quad (21)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \epsilon \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} = & \frac{\epsilon_0}{\|\tilde{q}\|(1 + \|\tilde{q}\|)^2} \tilde{q}^T \dot{q} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \\ \leq & \epsilon_0 \lambda_{Max}\{M(q)\} \|\dot{q}\|^2 \end{aligned} \quad (22)$$

Por lo tanto, la derivada con respecto al tiempo de la función de energía (17) está acotada

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) \leq & -\frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{q}\|} \lambda_{min}\{K_v(\tilde{q}, \dot{q})\} \|\tilde{q}\|^2 \\ & - [\lambda_{min}\{K_v(\tilde{q}, \dot{q})\} \\ & + \lambda_{min}\{B\} - \epsilon_0 k_{ro} \\ & - 2 \epsilon_0 \lambda_{Max}\{M(q)\}] \|\dot{q}\|^2 \\ & + \epsilon_0 [\lambda_{Max}\{K_v(\tilde{q}, \dot{q})\} \\ & + \lambda_{Max}\{B\}] \|\tilde{q}\| \|\dot{q}\| \end{aligned} \quad (23)$$

Entonces.

$$\leq - \left[ \frac{\|\tilde{q}\|}{\|\dot{q}\|} \right]^T Q \left[ \frac{\|\tilde{q}\|}{\|\dot{q}\|} \right] \quad (24)$$

La matriz  $Q$  se compone:

- $Q(1,1) = \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{q}\|} \lambda_{min}\{K_v(\tilde{q}, \dot{q})\}$
- $Q(1,2) = \frac{\epsilon_0}{2} [\lambda_{Max}\{K_v(\tilde{q}, \dot{q})\} + \lambda_{Max}\{B\}]$
- $Q(2,1) = Q(1,2)$
- $Q(2,2) = \lambda_{min}\{K_v(\tilde{q}, \dot{q})\} + \lambda_{min}\{B\} - \epsilon_0 k_{ro} - 2 \epsilon_0 \lambda_{Max}\{M(q)\}$

Por lo tanto, las condiciones son:

$$\frac{a_1 + a_2}{[1 + \|\tilde{q}\|]b_1 + b_2} > \epsilon_0 \geq \epsilon \quad (25)$$

- $P(1,1) = 4 \lambda_{min}\{K_v(\tilde{q}, \dot{q})\} \lambda_{min}\{K_v(\tilde{q}, \dot{q})\}$
- $P(1,2) = \lambda_{Max}\{B\}$
- $P(1,2) = \lambda_{Max}\{K_v(\tilde{q}, \dot{q})\} + \lambda_{Max}\{B\}$
- $P(2,2) = 4 \lambda_{min}\{K_v(\tilde{q}, \dot{q})\} [\epsilon_0 k_{ro} + 2 \lambda_{Max}\{M(q)\}]$

La elección de  $\epsilon$  está en función de satisfacer (15) y (25) de manera simultánea, obtener su valor numérico no es necesario para la familia de algoritmos de control y sólo es necesario para propósitos de la demostración de estabilidad asintótica del punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado en el espacio de estados. Dicho lo anterior, concluimos que el punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (11) es asintóticamente estable y global, desde el contexto de la teoría de estabilidad de Lyapunov.

## 7. DISEÑO DE LAS MATRICES DE GANANCIA

Con fines de evaluar a la familia grande de ganancias variables (7) y (8), proponemos los siguientes casos particulares de  $f_{pi}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i)$  y  $f_{vi}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i)$ .

$$\begin{aligned} k_{pi}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) = & \hat{k}_{pi} (1 - \beta e^{-\beta(\sinh(\tilde{q}_i)^2 + \cosh(\dot{q}_i)^2)}) \\ k_{vi}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) = & \hat{k}_{vi} (1 - \beta e^{-\beta(\sinh(\tilde{q}_i)^2 + \cosh(\dot{q}_i)^2)}) \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} k_{pi}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) = & \hat{k}_{pi} (1 - \beta e^{-\beta \tanh(\tilde{q}_i^2 + \dot{q}_i^2)}) \\ k_{vi}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) = & \hat{k}_{vi} (1 - \beta e^{-\beta(\sinh(\tilde{q}_i)^2 + \cosh(\dot{q}_i)^2)}) \end{aligned} \quad (27)$$

Siendo  $\hat{k}_{pi} = \delta_i \sqrt{\tau_i^{Max}}$ ,  $\hat{k}_{vi} = \gamma_i \sqrt{\tau_i^{Max} + 1}$ ,  $\delta_i > 0$ ,  $\gamma_i > 0$  y  $\tau_i^{Max}$  es el par  $i$ -ésimo máximo aplicado por el servomotor del robot manipulador.

## 8. RESULTADOS EXPERIMENTALES

En la Facultad de Ciencias de la Electrónica, de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México, se ha diseñado y construido un robot manipulador de transmisión directa (direct drive) de 3 grados de libertad (ver Fig. 1). Cuenta con 3 eslabones rígidos fabricados con aluminio 6061 con articulaciones rotacionales accionadas por servomotores de transmisión directa sin escobillas, de la compañía Parker Compumotor con las especificaciones técnicas mostradas en la Tabla 1. El experimento consiste en mover cada uno de los

eslabones del robot desde la posición de casa  $[0,0,0]^T$  grados a una posición deseada  $[90,45,45]^T$  grados. Los algoritmos de control a evaluar, es el control PD con ganancias constantes y dos casos particulares (26) y (27) de la familia extensa de reguladores PD con ganancias variables.



Figura 1. Robot direct drive BUAP.

En la Figura 2, se puede mostrar la respuesta de los errores de posición del robot manipulador de 3 grados de libertad, respectivamente. Observe que se llega asintóticamente a cero sin sobre impulsos y de forma suave a estado estacionario. Dicho de otra manera, el esquema de control PD con ganancias constantes, cumple con el objetivo de llevar al robot manipulador hacia la posición deseada.

La Figura 3 nos muestra la velocidad de movimiento del manipulador, las tres velocidades articulares llegan asintóticamente a cero. Por lo tanto, se ha podido mostrar de manera cualitativa que el robot manipulador llega al punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado de forma asintótica dado los resultados mostrados en la Figura 2 y Figura 3.

La Figura 4, nos muestra la energía suministrada al robot manipulador. Los límites físicos no son superados, esto gracias a la correcta sintonía de las ganancias constantes de manera empírica y la cual no está sustentada bajo ningún método científico. A continuación, se presenta el primer caso particular de la familia extensa de algoritmos de control con ganancias variables. Comenzamos exponiendo los resultados obtenidos con la estructura matemática (26).

Los errores de posición del robot, respectivamente, se ilustran en la Figura 5. Por medio de la propuesta de (26) las ganancias variables se sintonizan automáticamente llevando a los errores de posición, desde la posición de casa, asintóticamente a cero sin sobre oscilaciones. Se logra llevar al manipulador a la posición deseada, sin pasar por el proceso de sintonía de ganancias empírica.

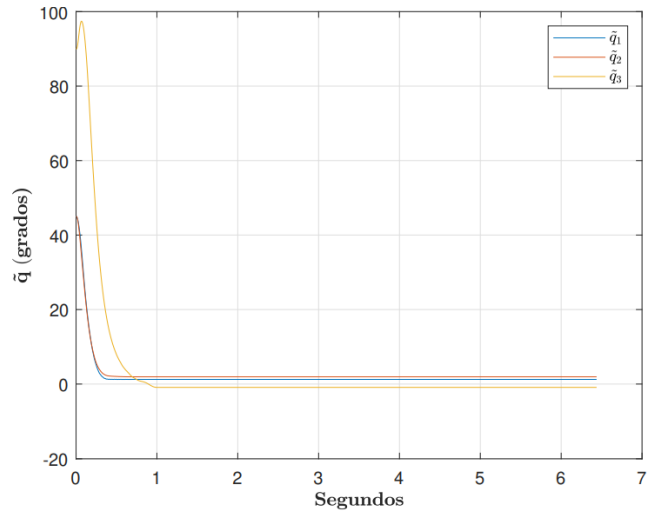


Figura 2. Error de posición PD ganancias constantes

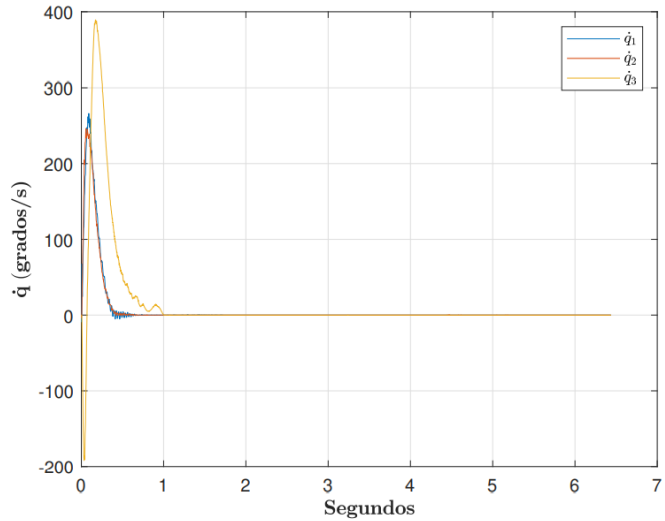


Figura 3. Velocidad del robot PD ganancias constantes

Articulación	Modelo	Par Máx	Resolución
Base	DM-1050	50 Nm	1,024,000
Hombro	DM-1150	150 Nm	1,024,000
Codo	DM-1015	15 Nm	1,024,000

Tabla 1. Características de los servomotores

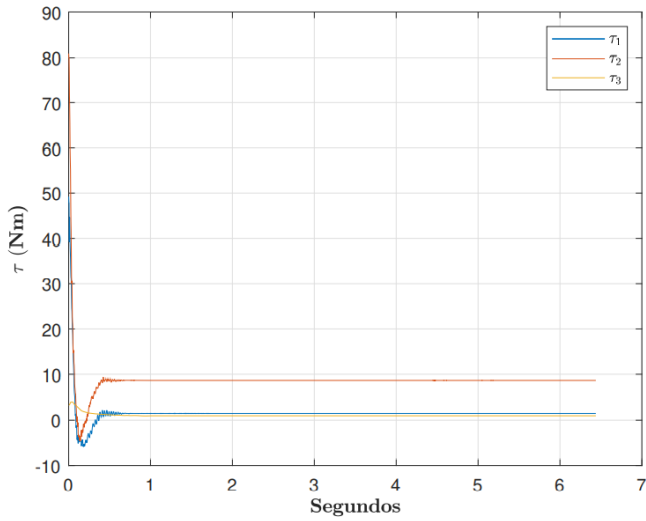


Figura 4. Pares aplicados PD ganancias constantes

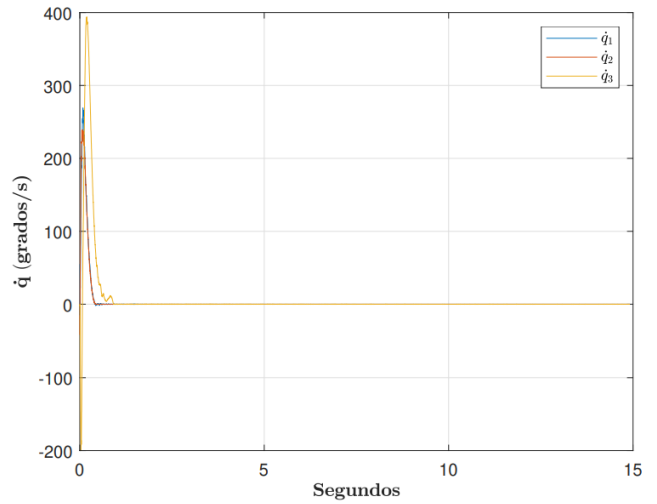


Figura 6. Velocidad del robot PD ganancias variables

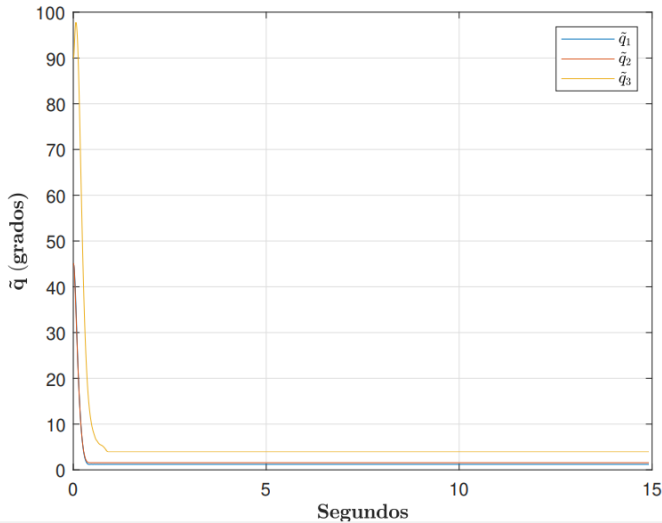


Figura 5. Error de posición PD ganancias variables

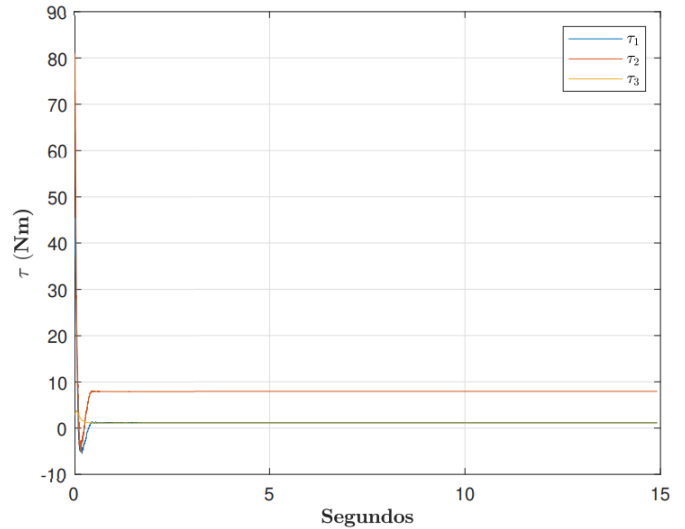


Figura 7. Pares aplicados PD ganancias variables

Para el siguiente caso particular de la familia extensa de reguladores PD, con la estructura matemática (27), se muestra la respuesta de los errores de posición del robot (ver Fig. 8). De igual forma, se llegan a las posiciones deseadas a partir de las posiciones de casa, sin sobre oscilaciones y de manera suave a estado estacionario. En el caso de las velocidades de movimiento, la Figura 9 nos muestra que también llegan a cero; por lo tanto, es posible decir que el robot manipulador también llega asintóticamente al punto de equilibrio. En suma, el segundo caso particular de la familia extensa de reguladores PD con ganancias variables cumple con, llevar al robot manipulador al punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado, con una respuesta suave y sin superar los límites físicos (ver Figura 10).

Para finalizar, evaluamos el desempeño de las propuestas particulares usando la norma  $\mathcal{L}_2$ . En la Figura 11, se muestra un gráfico de la comparativa de los 3 algoritmos de control implementados en este experimento. El caso particular (26) tiene una mejora en su desempeño del 40.44 por ciento, con respecto al PD con ganancias constantes. Mientras que, el caso particular (27) tiene una mejora del 48.49 por ciento, con respecto al de ganancias constantes. Es importante resaltar que, dependiendo de la propuesta de  $f_{pi}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i)$  y  $f_{vi}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i)$  se tendrá un mayor índice de desempeño de la familia de reguladores.

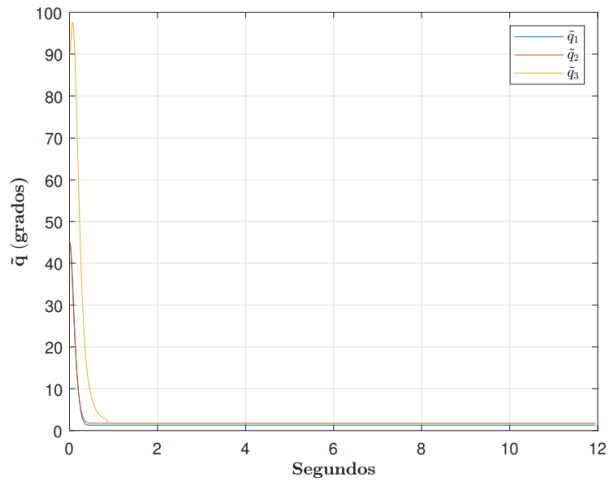


Figura 8. Error de posición PD ganancias variables

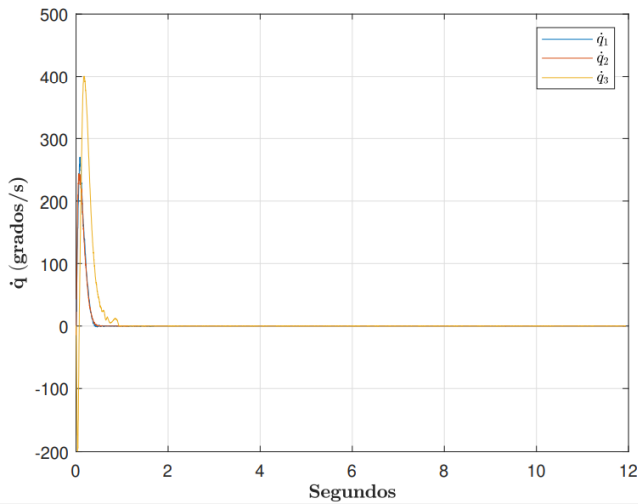


Figura 9. Velocidad del robot PD ganancias variables

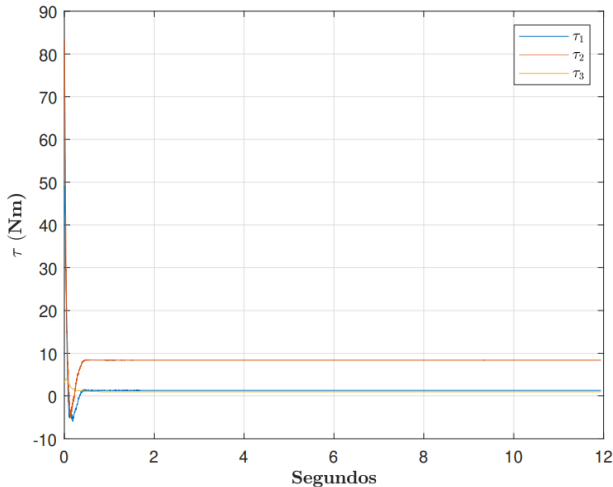


Figura 10. Pares aplicados PD con ganancias variables

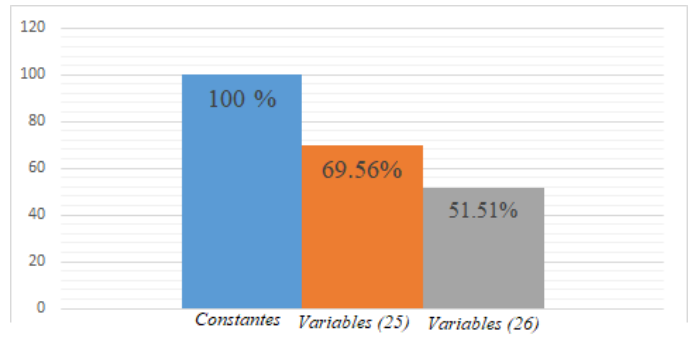


Figura 11. Índices de desempeño de los reguladores

## 9. CONCLUSIONES

La familia de reguladores PD con ganancias variables soluciona la problemática de regulación; de manera formal, debido a la correcta propuesta de la función estricta de Lyapunov y de forma experimental a través de los resultados positivos de dos casos particulares. Nuestra propuesta, toma fuerza al obtener mejoras en su desempeño de casi un cincuenta por ciento con tan sólo evaluar dos casos particulares, con respecto a su versión con ganancias constantes. Un resultado muy positivo en nuestra propuesta. También, es ampliamente conocido que, el PD es un esquema de control de bajo desempeño, esto nos motiva poder combinar a la familia extensa de ganancias variables en algoritmos de control de alto de desempeño.

## Referencias.

- [1] R. Kelly, R. Carelli, A class Nolinear PD-type Controllers for robot manipulators, Journal of robotics systems, Vol. 13, 1996, 793-802.
- [2] V. Santibáñez, R. Kelly, Strict Lyapunov fuctions for control of robot manipulators, Automatica, Vol. 33, 1997, 675-682.
- [3] F. Reyes, J. Cid, C. Campuzano, Development of an experimental platform with open architecture for robot manipulators, IASTED International Conference Modeling and Simulation, 1999, 77-83.
- [4] R. Kelly, R. Haber., R. Haber-Guerra, F. Reyes, Lyapunov Stable Control of Robot Manipulators: A Fuzzy Self-Tuning Procedure, Intelligent Automation and Soft Computing, Vol. 5 No. 4, (1999), pp. 313-326.
- [5] M. A. Llama, R. Kelly, V. Santibáñez, A stable motion control system for manipulators via fuzzy self-tuning, Fuzzy Sets and Systems 124 (2), (2001), pp. 133-154.
- [6] Y. Zuo, Y. Wang, L. Huang., C. Li., Intelligent Hybrid Control Strategy for Trajectory Tracking of robot manipulators, Journal of Control Science and Engineering, vol. 2008, (2008).
- [7] W. Shang, Z. Cong, L. Xiang, S. Long Jiang, Augmented Nolinear PD controller for a Redundantly Actuated Parallel Manipulator, Advanced Robotics, vol. 23, (2009), pp. 1725-1742.
- [8] Reyes, F., Robótica Control de robots manipuladores, México, AlfaOmega, Primera edición, (2011) pp. 257.
- [9] F. Salas., V. Santibáñez, M. A. Llama, Variable gains PD tracking control of robot manipulators: Stability analysis and simulations, World Automatic Congress (WAC), (2012), pp. 1-6.
- [10] M. A. Limón-Díaz, F. Reyes-Cortés, E. Gonzales-Galvan, Unbounded regulators with variable gains for a direct-drive robot manipulator, Automatika: Journal for control, Measurement, Electronics, Computing and Communications, volume 57:2, (2016), pp. 484-495. Korema IFAC.
- [11] M. A. Limón-Díaz, F. Reyes-Cortés, E. Gonzales-Galvan, Saturated regulation with derivate variable gain for robot manipulators, RIAI Elsevier, (2017), pp. 434-444.