

ANÁLISIS Y SIMULACIÓN DE PÉNDULO INVERTIDO UTILIZANDO UN SENSOR MPU

Área técnica: Mecatrónica

Rios-Silva, Victor Manuel; Hernández-Santos, Carlos; Jesús-Rincón, Ernesto, Valderrama-Chairez, José;
Tecnológico Nacional de México/ I.T. de Nuevo León

Av. Eloy Cavazos # 2001 Colonia Tolteca, C.P. 67170, Guadalupe, Nuevo León.

Tel: (81) 8157 0500

carlos.hernandez@itnl.edu.mx

RESUMEN.

El trabajo presenta, aplica y explica los fenómenos físicos, modelos matemáticos y modelos de control sobre un péndulo invertido montado en una base móvil con dos grados de libertad.

El trabajo muestra las ecuaciones de analíticas de control utilizando la técnica de variables de estado, con la variante que la retroalimentación del control se realiza mediante un sensor MPU sujeto al extremo final del péndulo.

Así, mismo se realizó la simulación mediante la herramienta Arduino-Matlab donde se aprecia el equilibrio y la estabilidad del péndulo invertido. Se concluye que utilizando un sensor MPU es eficiente para lograr la estabilidad de la posición angular del péndulo.

Palabras claves:

Péndulo Invertido, Sensor MPU, Modelado Matemático.

ABSTRACT.

The work presents, applies and explains the physical phenomena, mathematical models and control models on an inverted pendulum mounted on a mobile base with two degrees of freedom.

The work shows the analytic equations for control using the state variables technique, with the variant that the control feedback is doing by an MPU sensor attach to the final end of the pendulum.

Also, the simulation is carried out using the Arduino-Matlab tool, where the equilibrium and stability of the inverted pendulum are appreciated. It is concluded that using an MPU sensor is efficient to achieve stability of the angular position of the pendulum.

Keywords:

Inverted pendulum, MPU sensor, mathematical modeling.

1. INTRODUCCIÓN

El péndulo invertido es un sistema mecánico clásico para probar ideas en la disciplina de control. Tiene la ventaja de ser un mecanismo sencillo y por otro lado tiene puntos inestables. El

péndulo invertido se utiliza principalmente para comparar algoritmos de control. [1]

El Péndulo invertido está montado sobre una plataforma impulsada por 2 ruedas de tracción y 2 ruedas libres. Este sistema es estudiado desde los años 60's [2] ya que destaca los sistemas lineales de estabilización en un lazo cerrado con un punto inestable en el lazo abierto, y esto generalmente aparece cuando el sistema es no lineal [3].

Hay que tener en cuenta que en la actualidad tiene aplicación en la industria aeroespacial y en la biotecnología también se está implementando este sistema [4].

Este sistema se compone básicamente de una varilla articulada en un carro que puede moverse de forma horizontal. El brazo se mueve libremente y el objetivo es llevar el brazo a posición de equilibrio inestable superior moviendo el carro en el plano horizontal.

Se tomó en cuenta que la aceleración del brazo no puede ser controlada directamente, el péndulo invertido es un sistema subactuado, por esto las técnicas desarrolladas para los robots manipuladores totalmente actuados no pueden dejar de usar este sistema [5].

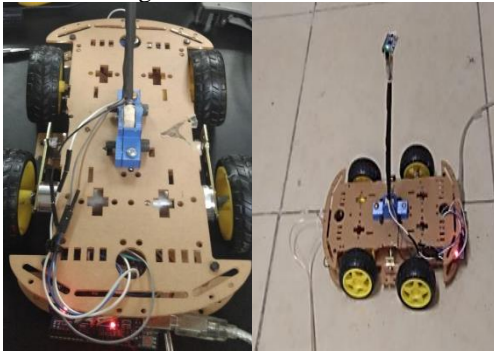
Este artículo presenta una estrategia que presenta los factores inherentes de carácter no línea en el sistema, al mismo tiempo se expresa un comportamiento global del movimiento del péndulo, el cual aporta una solución al problema de ajuste en el modelo obtenido, tomando en cuenta el tiempo de respuesta del MPU y el tiempo de acción del sistema.

2. ESTRUCTURA MECANICA

El carrito este compuesto por un doble chasis de material acrílico de forma rectangular para 4 ruedas, con una altura de 3.5 cm, 25 cm de largo y 16 cm de ancho, con motores del modelo RB 04M043 y tienen un rango de rango 625 RPM con un torque de 1.1 kg/cm y necesita una corriente de 1.6 A.

En cuanto el tipo de llanta que se utiliza son de goma con un peso de 50 gr cada una, se seleccionó esta llanta ya que tiene una buena tracción con gran variedad de superficies como roca, tierra y asfalto, como muestra la Figura 1.

Figura 1 carrito Arduino.



En la parte superior se creó una caja para poder montar el péndulo en el centro del chasis, este tiene medidas de 8 cm de largo 6 cm de ancho y 4 cm de altura, este dispositivo tiene un peso de 62 gr el cual está libre en la parte central. El péndulo se encuentra enroscado en un balero donde el péndulo tiene una longitud de 26 cm de largo y un peso de 38 gr.

3. INSTRUMENTACIÓN ELECTRÓNICA.

Los componentes eléctricos que se utilizaron para el sistema propuesto son los siguientes:

Arduino 1, realiza el control del prototipo propuesto como muestra la Figura 2.

Figura 2. Arduino uno



Para el control de los motores se utilizará un puente H298N el cual cuenta con un interfaz de potencia de 7V hasta 46 V y una corriente máxima de 2A, mientras que su corriente de control es de 36 mA con una potencia de salida de 25W, en la programación el controlador realiza las funciones del movimiento de los motores dependiendo del movimiento del péndulo como muestra la Figura 3.

Figura 3. Puente H298n



El MPU6050 genera mayor parte la variación de la velocidad por unidad de tiempo, el cual nos regula la aceleración, con este se realizó mediciones indirectas con respecto el eje y este a su vez utiliza una combinación de acelerómetro y giroscopios para obtener sistemas de 6 grados de libertad, en nuestro sistema será suficiente con emplear un sistema de 6 grados de libertad (ver Figura 4).

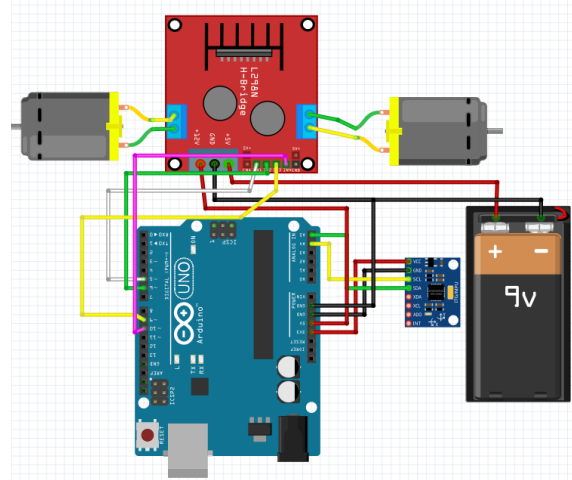
El sensor giroscopio va incluido en el MPU 6050 que son también MEMS, su funcionamiento está basado en una pequeña masa que varía su posición al variar la velocidad angular, el dispositivo convierte esto en una señal medible.

Figura 4. MPU 6050



La conexión electrónica se realizó como muestra la Figura 6.

Figura 6 Conexiones de Arduino con todos los componentes



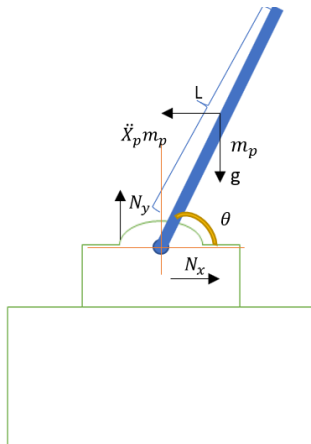
4. Modelado matemático.

En trabajo realizado se presenta en un plano R2, donde el sistema mecánico se encuentra en R3, Se considero que nuestro sistema es inestable y despreciamos la fricción como lo muestra la Figura 7, donde la Tabla 1 especifica el símbolo asignado a cada variable de la Figura 7.

En nuestro sistema se tiene claro que se pueden tomar diferentes tipos de variables a considerar, el presente artículo solamente considera tomar la variable de respuesta del MPU con respecto la aceleración que debe tener nuestro sistema, y a su vez la potencia que deben ejercer los motores, para el equilibrio dado.

El sistema es válido en condiciones donde la superficie sea libre y a su vez lo más plana posible y sin ángulos de inclinación, ya que esto afectaría nuestro sistema y opondría otro tipo de resistencias y parámetros a utilizar. Por otro lado, hay que tener en cuenta que el péndulo se considera que parte de forma inicial en un ángulo de 90° y de ahí empieza el control de este.

Figura 7. Diagrama de cuerpo libre del carrito



En el modelo tomamos en cuenta tres conceptos primordiales: El primero es el movimiento del péndulo, donde este genera una aceleración en su movimiento.

Por segunda opción tomamos en cuenta el torque del motor que tiene, ya que por diferentes experimentos realizados se concretó que lo importante es el tipo de torque que se utiliza para poder tener mayor potencia con un menor motor y así generar un torque con mayor fuerza.

Por tercera opción que se tomó en cuenta fue el sistema electrónico, ya que inicialmente no se había tomado en cuenta, donde se analizó que dependiendo de la potencia que se tenga es el movimiento que tendrá nuestro sistema.

Para este modelado se tomaron en cuenta los datos de la Tabla 1.

Tabla 1.

Variable	Símbolo	Unidad
Gravedad	G	m/s^2
Estructura del robot	J_p	$Kg * m^2$
Masa del péndulo	m_p	Kg
Distancia centro de rueda al péndulo	L	m
Angulo del péndulo.	θ	rad
Dirección del péndulo en X	X_p	m .
Dirección del péndulo en Y.	Y_p	m .
Velocidad angular péndulo.	$\dot{\varphi}$	$\frac{rad}{seg}$
Dirección del péndulo.	Y_p	m
Fuerza entre el péndulo y la rueda en y.	N_y	N
Fuerza entre el péndulo y la rueda en x.	N_x	N
Aceleración angular del péndulo.	\ddot{X}_p	$\frac{rad}{seg^2}$
Ancho del robot	A_r	m
Altura del robot	H_r	m

A continuación, se da a conocer los parámetros que tomaremos encuentra con respecto el torque de la rueda en la Tabla 2.

Tabla 2

Variable	Símbolo	Unidad
Inercia de la rueda.	J_r	$Kg * m^2$
Masa de la rueda.	m_r	Kg
Radio de la rueda.	r	m
Velocidad angular de la rueda.	$\dot{\vartheta}$	rad/seg
Dirección de las ruedas en X.	X_r	m
Dirección de las ruedas Y.	Y_r	m
Fuerza normal del suelo sobre las ruedas.	N	N
Fuerza de fricción entre el suelo y las ruedas.	F	N
Angulo de la rueda	ϑ	rad

La Tabla 3 expresa los parámetros que se tomaron en cuenta para el circuito eléctrico

Tabla 3.

Variable	Símbolo	Unidad
Resistencia eléctrica nominal.	R_a	$Kg * m^2$
Constante del motor DC.	K_t	Kg
Constante EMF de motor DC.	K_e	m
Motor	T_m	Rad
Voltaje del motor	V	v

Principalmente iniciamos con las coordenadas del centro de gravedad. Donde el péndulo tendrá coordenadas (X_p, Y_p) de modo que:

$$X_p = l \sin \theta \quad (1)$$

$$Y_p = l \cos \theta \quad (2)$$

Al tener estas ecuaciones iniciales y el modelo inicial obtenemos la ecuación (3) y (4) donde actúan en dirección de los ejes X y Y donde el resultado es:

$$N_x = m_p(\ddot{X}_p + L \theta \cos \theta - L \theta^2 \sin \theta) \quad (3)$$

$$N_y = m_p(\ddot{Y}_p + g) \quad (4)$$

Dado que tenemos aceleraciones que no son lineales entonces obtenemos las derivadas de la ecuación (1) y (2) para poder obtener la velocidad y la aceleración angular donde nos quedan la ecuación (5) (6) que son sus ecuaciones en velocidad angular, mientras la ecuación (7) y (8) hablan de la velocidad angular:

$$\dot{X}_p = -L \dot{\theta} \cos \theta \quad (5)$$

$$\dot{Y}_p = L \dot{\theta} \sin \theta \quad (6)$$

$$\ddot{X}_p = -L \ddot{\theta} \cos \theta + L \dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (7)$$

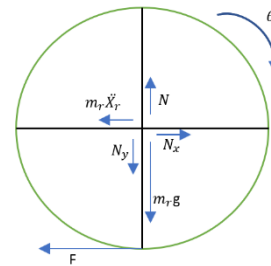
$$\ddot{Y}_p = -L \ddot{\theta} \sin \theta - L \dot{\theta}^2 \cos \theta \quad (8)$$

Entonces para encontrar la inercia del robot se ha considerado que la distribución del carrito es una masa uniforme el cual la inercia se calcula con una expresión clásica que es la ecuación (9):

$$J_r = \frac{1}{12} m_p A_r^2 + \frac{1}{3} m_p H_r^2 \quad (9)$$

Para el siguiente sistema analizaremos las fuerzas que actúan sobre el motor, donde en él se genera una fuerza de torque y hay diferentes fuerzas que actúan sobre él, como muestra la Figura 8 con respecto el diagrama del motor.

Figura 8.
Diagrama de movimiento de fuerzas en la rueda.



Dado el sistema de fuerzas entonces hacemos la sumatoria de fuerza por los ejes, tanto eje X como el eje Y, como muestra la ecuación (10) y (11):

$$N_x = \ddot{X}_r m_r + F \quad (10)$$

$$N_y = N - \ddot{Y}_r m_r - g m_r \quad (11)$$

Para nuestro sistema tenemos coordenadas en X, Y como muestran las ecuaciones (10) y (11) pero hay que tener en cuenta que no hay movimiento en las ruedas sobre el eje Y entonces tomaremos solamente en cuenta la velocidad de las ruedas en el eje X y en el eje Y se omitirá ya que no hay movimiento en este eje y queda la siguiente ecuación:

$$\ddot{X}_r = \ddot{\vartheta} \quad (12)$$

De la misma manera que con el carrito calculamos la inercia que genera el motor que la calculamos con la ecuación (13):

$$J_r = \frac{2r \sin 2\vartheta}{3\vartheta} \quad (13)$$

Por último, se realiza un análisis del sistema eléctrico donde toma en cuenta la Tabla 3.

Hay que tener en cuenta que se utilizó dos motores que son de corriente continua con el cual proporciona un sistema de voltaje de entrada y usando las leyes de Kirchhoff tendremos la siguiente ecuación:

$$V = R_a I_a + K_e \dot{\theta} \quad (14)$$

Y la siguiente ecuación describe el movimiento del par del eje:

$$T_m = K_t I_a \quad (15)$$

Como el eje necesita superar la inercia del motor, así como el amortiguamiento y la fricción, en este caso estos dos parámetros los vamos a despreciar para poder usar la ecuación (15).

Para encontrar K_e se realizará con la siguiente ecuación:

$$K_e = \frac{(V_r - I_a R) 60}{2\pi N_r} \quad (16)$$

Entonces la ecuación que se utilizará en el modelo eléctrico será:

$$T_m = \frac{K_t V}{R_a} - \frac{K_e K_t \dot{\theta}}{R_a} \quad (17)$$

Entonces la linealización del modelo matemático queda de la siguiente manera:

$$X = \begin{bmatrix} \theta \\ \vartheta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix}$$

Linealizando el modelo queda de la siguiente forma:

$$\dot{X} = Ax + Bu \quad (18)$$

$$Y = Cx + Du \quad (19)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{13} \\ B_{14} \end{bmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donde a, b, c, d es lo siguiente:

$$a = \frac{gL^2 r m_p^2}{-L^2 r^2 m_p^2 + J_p (J_r + r^2 (m_p + m_r)) - 2J_p K_e K_t - 2Lr K_e K_t m_p} \quad (20)$$

$$b = \frac{-L^2 r^2 m_p^2 + J_p (J_r + r^2 (m_p + m_r)) R_a}{-L^2 r^2 m_p^2 + J_p (J_r + r^2 (m_p + m_r)) R_a - 2J_p K_e K_t - 2Lr K_e K_t m_p} \quad (21)$$

$$c = \frac{gL J_r m_p R_a + L r^2 m_p (g m_p + g m_r) R_a}{-L^2 r^2 m_p^2 + J_p (J_r + r^2 (m_p + m_r)) R_a} \quad (22)$$

$$d = \frac{2J_p K_e K_t - 2r K_e K_t (L + r) m_p + r m_r}{-L^2 r^2 m_p^2 + J_p (J_r + r^2 (m_p + m_r)) R_a} \quad (23)$$

$$B_{14} = \frac{2J_p K_e K_t + 2r K_t (L + r) m_p + r m_r}{-L^2 r^2 m_p^2 + J_p (J_r + r^2 (m_p + m_r)) R_a} \quad (24)$$

$$B_{13} = \frac{2J_p K_t + 2Lr K_t m_p}{-L^2 r^2 m_p^2 + J_p (J_r + r^2 (m_p + m_r)) R_a} \quad (25)$$

5. Sistema de control.

Los resultados del análisis matemático se utilizaron como parte inicial en nuestro sistema de control, donde el sensor MPU, realizó una serie de pruebas el cual se utilizaron dos variables (X, Y) donde la X justifica el desplazamiento angular del Pendulo

invertido y la Y como una constante, donde es necesario para que funcione nuestro sistema.

La variable X al ser un parámetro fundamental en nuestro sistema se empleó como una constante en las pruebas inicial donde $x = -\frac{1.48}{\pi}$ y se justifica como el Pendulo en 90° .

Al iniciar el Pendulo de esa manera el sistema empieza con un setup manual el cual identifica el movimiento de este, tomando en cuenta que realiza una conversión angular de nuestro para calcular la aceleración necesaria de los motores.

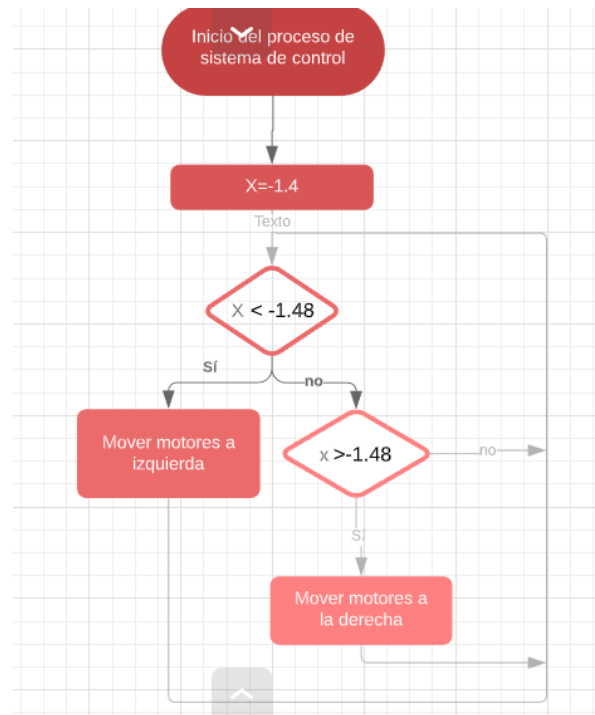
El programa analiza es que si tiene un movimiento menor a X entonces la aceleración se realizara a lado izquierdo para poder equilibrar nuestra barra de lado contrario si la lectura del MPU es mayor a X entonces nuestro sistema va a realizar el movimiento de lado derecho para poder equilibrar nuestro sistema.

Con esto. los actuadores que son nuestros dos motores reciben la orden de poder desplazarse hacia el lado derecho o izquierdo dependiendo del movimiento angular de la barra.

La Figura 9 muestra el algoritmo de control del sistema y representa el movimiento del péndulo con respecto los actuadores.

Figura 9

Algoritmo con respecto el movimiento de los actuadores.



6. Resultados

Para realizar la simulación del prototipo propuesto se toman los parámetros de la Tabla 4.

TABLA 4.- Parámetros con respecto el péndulo.

Variable	Símbolo	Valor numérico
Gravedad	g	9.81
Estructura del robot	J_p	1.58
Masa del péndulo	m_p	0.052
Distancia centro de rueda al péndulo	L	0.26
Angulo del péndulo.	θ	$\pi/3$
Ancho del robot	A_r	0.25
Altura del robot	H_r	0.035

Con los datos dados anteriormente los resultados en el sistema son los siguientes:

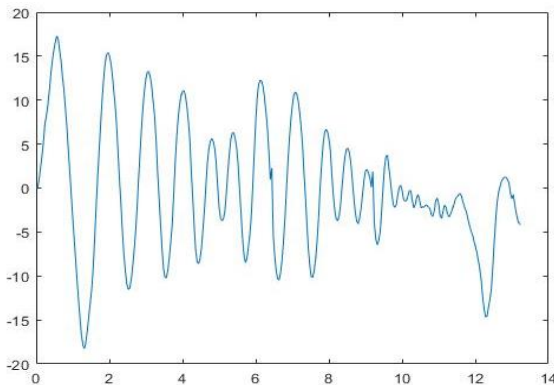
$$a = 3.035 \times 10^{-7} \quad b = -1.3563 \times 10^{-3}$$

$$c = 1.8833 \quad d = 1.3633 \times 10^{-3}$$

A continuación, se muestra la figura 10 de nuestro sistema y su movimiento en tiempo real.

Figura 10.

Movimiento y estabilización del sistema.



Dados los resultados podemos observar que al inicio tiene una perturbación de movimiento y para estabilizar el sistema tarda un tiempo aproximado de 5 segundos, el cual llega a estar un momento estable y después vuelve a tener una perturbación, como lo muestra la gráfica 1.

7. Conclusión y trabajo futuro.

Este artículo muestra el problema de control no lineal, tomando como referencia el sistema de Péndulo invertido, donde aparecen los problemas más notables en los sistemas lineales encontrando una justificación de ellos.

Al final el sistema logró poder ser un modelo de estabilización teniendo en cuenta los parámetros mencionados el cual deberán ser prioritarios para que nuestro sistema funcione.

Con los resultados mostrados se puede observar que existe una correlación lineal entre el modelo mecánico con el modelo matemático y el modelo electrónico, el cual es muy interesante en estos tipos de sistemas ya que, si uno de estos parámetros falla o no se encuentra en los rangos mencionados en este artículo, difícilmente podrá funcionar el sistema en dicho medio.

Como retroalimentación final podemos asegurar que las variables de estado que se mostraron fueron eficientes en el sistema de control para mantener en equilibrio nuestro péndulo sin grandes existencias en la señal de control.

Como trabajo futuro se pretende diseñar una tarjeta de circuito impreso la cual se pretende que funcione como tarjeta madre donde podremos colocar todas las conexiones del hardware de nuestro sistema, con el fin de evitar que existan interferencias que perturben la respuesta de nuestro sistema. También se pretende mejorar el sistema utilizando motores que cuenten con sensores de posición con el fin de hacer más preciso en nuestro sistema.

8. Referencias.

- [1] R. Tinoco, Diseño y Simulación de un Sistema de Control de Péndulo Invertido, Tesis Ing. Mec., Facultad de Ingeniería Mecánica, Escuela Superior Politécnica del Litoral, Guayaquil, Ecuador, 2005
- [2] Viguria, A., Cano, R., Fiacchini, M., Prieto, A., Vela, B. J., Rubio, F. R., ... & de Ingenieros, E. S. (2005). PPCar (Personal Pendulum Car): Vehículo basado en péndulo invertido. *Escuela Superior de Ingenieros de Sevilla*.
- [3]- Aracil, J., & Gordillo, F. (2010). El péndulo invertido: un desafío para el control no lineal. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, 2(2), 8-19.
- [4] K. Ogata, *Ingeniería de Control Moderna*, Tercera edición, Prentice-Hall Hispanoamérica, México D.F., 1995.
- [5] Análisis y control de un péndulo invertido sobre base móvil Roberto Murueta-Fortiz. 6to. Congreso Nacional de Mecatrónica, Noviembre 8-10, 2007 Instituto Tecnológico de San Luis Potosí, S.L.P.